第四章

效用

偏好 - 複習

- $x \succ y$：x 偏好嚴格優於y
- $x \sim y$：x 與 y 偏好相同
- $x \succsim y$：x 偏好至少同於 y

偏好 - 複習

- 完整性：任兩組合 x 與 y 必然是

$$x \succsim y$$

或

$$y \succsim x$$

偏好 - 複習

- 反身性： 任何組合 x 偏好至少同於自身; 亦即

$$x \succsim x$$

偏好 - 複習

- 遞移性： 若
  x 偏好至少同於y, 且
  y 偏好至少同於z, 則
  x 偏好至少同於z; 亦即

$$x \succsim y \text{ and } y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$$

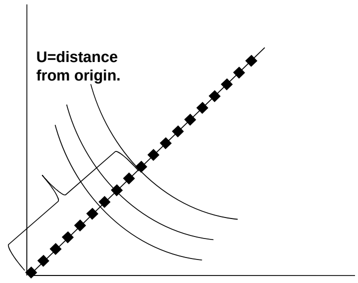
效用函數

- A utility function
  - is a way of assigning a number to every possible consumption bundle such that more-preferred bundles get assigned larger numbers than less-preferred bundles.
  - 效用函數是對所有可能消費組合訂定一套評分，偏好較高的組合分數較高。
- 能夠以效用函數表示偏好，指能夠建立一套上述的評分系統。同一個偏好的評分系統不只唯一。

效用函數

- 一偏好關係若符合完整、反身、遞移與連續，可以連續的效用函數來代表
- 連續性
  - 指消費組合的微小變動只會導致偏好水平的微小變動
  - 字典型(lexicographic)偏好違反連續性

建構效用函數



效用函數

- 一效用函數 U(x) 代表偏好關係 $\succsim$，

若且唯若：

$x' \succ x'' \Leftrightarrow U(x') > U(x'')$

$x' \prec x'' \Leftrightarrow U(x') < U(x'')$

$x' \sim x'' \Leftrightarrow U(x') = U(x'')$

效用函數

- 效用為序數(ordinal)概念
- 例如 U(x) = 6 與 U(y) = 2 表示組合 x 偏好嚴格優於組合 y。但 x 並非偏好三倍於 y。

效用函數 & 無異曲線

- 考慮組合 (4,1), (2,3) 與 (2,2)
- 設若 (2,3) $\succ$ (4,1) ~ (2,2)
- 指定維持偏好順序的任意三個數字給此三個組合;
  例如U(2,3) = 6 > U(4,1) = U(2,2) = 4
- 稱這些數字為 效用水平

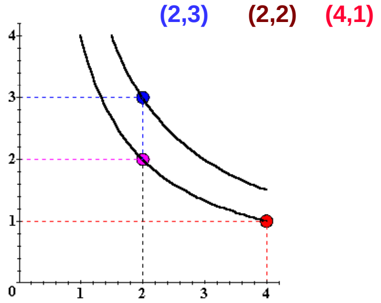
效用函數 & 無異曲線

- 一條無異曲線包含所有相同偏好的組合
- 相同偏好 $\Rightarrow$ 相同效用水平
- 故一條無異曲線的所有組合有相同的效用水平

效用函數 & 無異曲線

- 故組合 (4,1) 與 (2,2) 落在效用水平U ≡ 4 的無異曲線上
- 而組合(2,3)落在效用水平U ≡ 6的無異曲線
- 在無異曲線圖，偏好的資訊看來像是：

效用函數 & 無異曲線

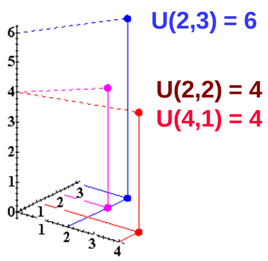


效用函數 & 無異曲線

- 顯現相同資訊的另一種方法，標示效用水平於縱軸

效用函數 & 無異曲線

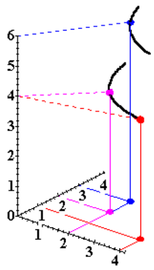
3種財貨組合消費 & 效用水平的3D圖



效用函數 & 無異曲線

- 此一偏好的3D圖加入兩條無異曲線，可以表達更多資訊

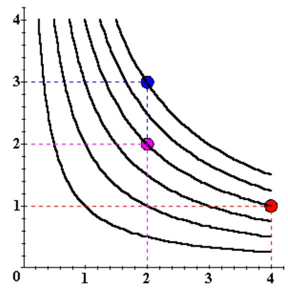
效用函數 & 無異曲線



效用函數 & 無異曲線

- 比較更多組合可以擴大無異曲線集合，得到更好的消費者偏好的描述

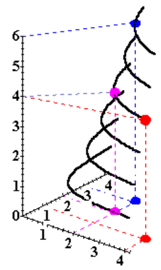
效用函數 & 無異曲線



效用函數 & 無異曲線

- 以 3D繪圖 ，各無異曲線的高度為其效用指數

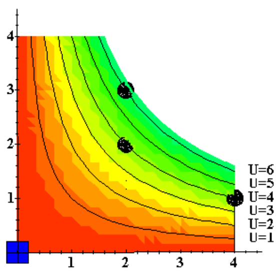
效用函數 & 無異曲線



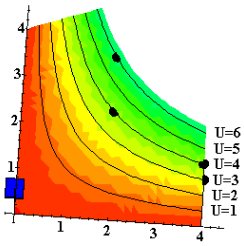
效用函數 & 無異曲線

- 比較所有可能消費組合，得到完整的消費者無異曲線集合，分別標上效用水平。
- 此一完整的無異曲線集合完整地 表達出消費者的偏好

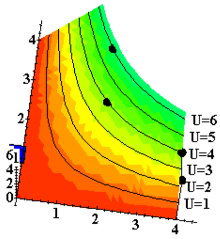
效用函數 & 無異曲線



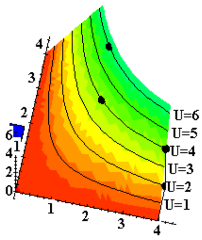
效用函數 & 無異曲線



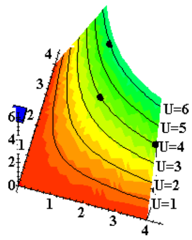
效用函數 & 無異曲線



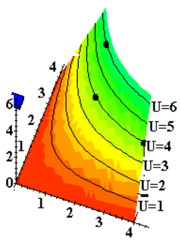
效用函數 & 無異曲線



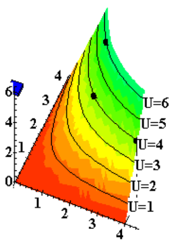
效用函數 & 無異曲線



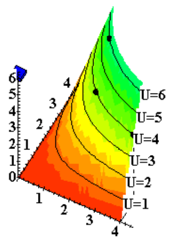
效用函數 & 無異曲線



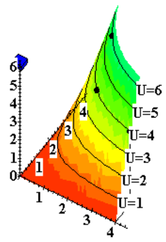
效用函數 & 無異曲線



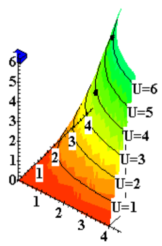
效用函數 & 無異曲線



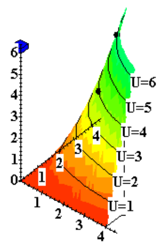
效用函數 & 無異曲線



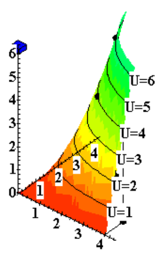
效用函數 & 無異曲線



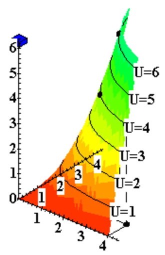
效用函數 & 無異曲線



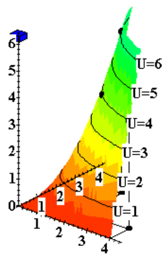
效用函數 & 無異曲線



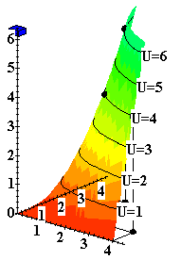
效用函數 & 無異曲線



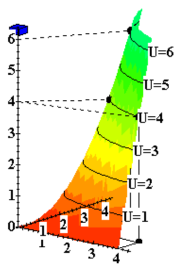
效用函數 & 無異曲線



效用函數 & 無異曲線



效用函數 & 無異曲線



效用函數 & 無異曲線

- 某一偏好關係的所有無異曲線集合，稱之為無異地圖(indifference map)
- 無異地圖同於效用函數; 互可代表。

效用函數

- 代表一偏好關係的效用函數並非唯一
- 設若 $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ 代表一偏好關係
- 考慮組合(4,1)、(2,3) 與 (2,2)

效用函數

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$, 故

  $U(2,3) = 6 > U(4,1) = U(2,2) = 4;$

  亦即， $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$

效用函數

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ $\Rightarrow$ $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$
- 定義 $V = U^2$
- 則 $V(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$ 且
  $V(2,3) = 36 > V(4,1) = V(2,2) = 16$
  故仍然有
  $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$
- V 保留了 U 相同的排序，故代表相同的偏好

效用函數

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ $\Rightarrow$ $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$
- 定義 $W = 2U + 10$
- 則 $W(x_1,x_2) = 2x_1x_2+10$ 故
  $W(2,3) = 22 > W(4,1) = W(2,2) = 18$
  再次地
  $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$
- W 維持了 U 與 V 相同的排序，故也代表相同的偏好

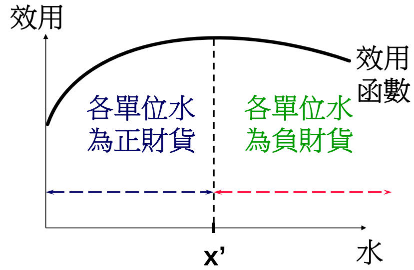
效用函數

- 若
  - U 為代表偏好關係 $\succsim$ 的效用函數，
  - f 為一嚴格增函數，f'>0
- 則 $V = f(U)$ 也為代表 $\succsim$ 的效用函數

正、負與中性財貨

- 正財貨為增加效用的一財貨單位 (消費可以提高偏好)
- 負財貨為降低效用的一財貨單位 (消費將會降低偏好)
- 中性財貨為一財貨單位，其消費不改變效用

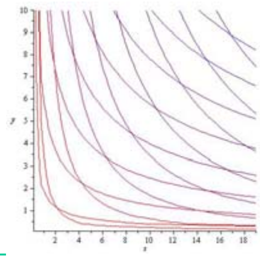
正、負與中性財貨



接近x'單位，額外增加的一點水為中性

一般Cobb-Douglas效用函數

- $U(x_1,x_2) = x_1^a x_2^b$，$a,b>0$



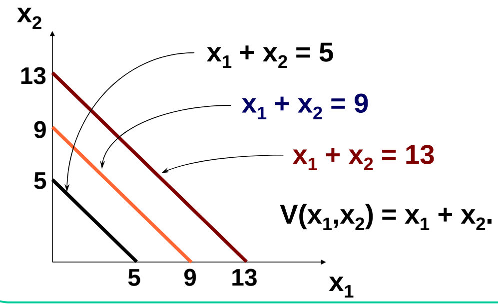
其他效用函數與其無異曲線

- 看過 $U(x_1,x_2) = x_1x_2$，現在來看看

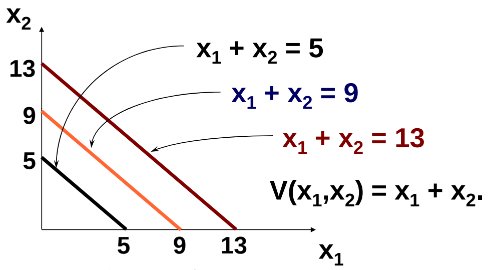
$$V(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

此完全替代效用函數的無異曲線看來像啥?

完全替代無異曲線



完全替代無異曲線



全為平行直線

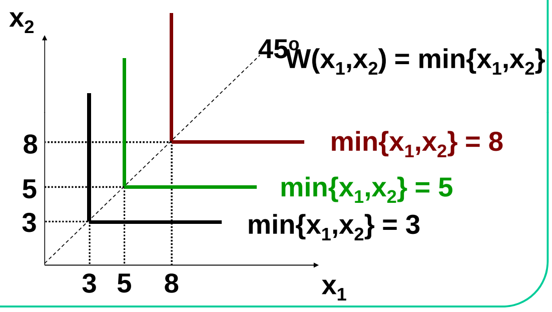
其他效用函數與其無異曲線

- 看過 $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ 與 $V(x_1,x_2) = x_1 + x_2$，現在看看

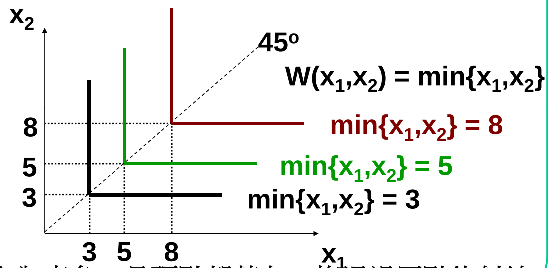
$$W(x_1,x_2) = \min\{x_1,x_2\}.$$

這個「完全互補」效用函數的無異曲線看來像啥?

完全互補無異曲線



完全互補無異曲線



全為直角，且頂點都落在一條通過原點的射線

其他效用函數與其無異曲線

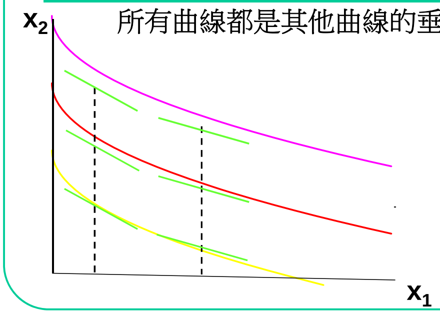
- 效用函數

$$U(x_1,x_2) = f(x_1) + x_2$$

只對 x_2 為線型，故稱之為準線型

- 例如， $U(x_1,x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$

準線性無異曲線



其他效用函數與其無異曲線

- 效用函數

$$U(x_1,x_2) = x_1^a x_2^b$$

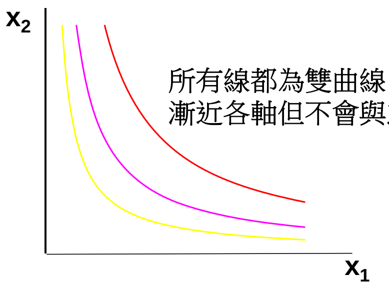
其中 a > 0 與 b > 0，

此為Cobb-Douglas 效用函數

- 例如，$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ (a = b = 1/2)

  $V(x_1,x_2) = x_1 x_2^3$ (a = 1, b = 3)

Cobb-Douglas 無異曲線



邊際效用

- 邊際指「增加值」
- 財貨 i 的邊際效用為財貨i 的消費量改變，導致總效用的變化率；亦即

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

邊際效用

- 例如，若$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ 則

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2$$

邊際效用

- 例如，若$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ 則

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2$$

邊際效用

- 例如，若$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ 則

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2 x_1^{1/2} x_2$$

邊際效用

- 例如，若$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ 則

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2 x_1^{1/2} x_2$$

邊際效用

- 故，若$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ 則

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2 x_1^{1/2} x_2$$

邊際效用與邊際替代率

- 無異曲線方程式一般記作
  $U(x_1,x_2) \equiv k$，為常數
  等式全微分得到

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

邊際效用與邊際替代率

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

重排得到

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1$$

邊際效用與邊際替代率

且 $$\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1$$

重排為

$$\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

此為MRS

邊際效用 & 邊際替代率; 範例

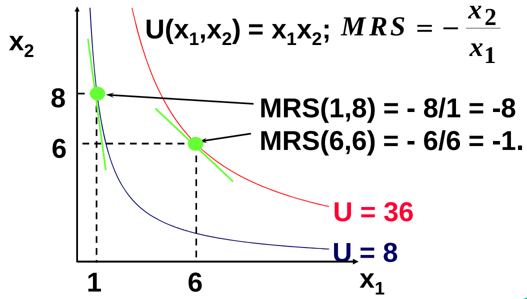
- 設若 $U(x_1,x_2) = x_1 x_2$. 則

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = (1)(x_2) = x_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = (x_1)(1) = x_1$$

故 $$MRS = \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = -\frac{x_2}{x_1}.$$

邊際效用 & 邊際替代率; 範例



準線性效用函數的邊際替代率

- 準線性效用函數的形式為

$U(x_1,x_2) = f(x_1) + x_2$

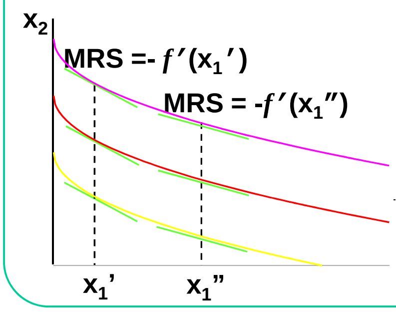
$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = f'(x_1) \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 1$$

故 $$MRS = \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = -f'(x_1).$$

準線性效用函數的邊際替代率

- $MRS = -f'(x_1)$ 不受x_2影響
- 故準線性效用函數無異曲線沿著固定x_1上的斜率為常數。
- 這會使準線性效用函數的無異地圖看起來像啥?

準線性效用函數的邊際替代率



每條曲線都是所有其他曲線的垂直平移

沿著任一 x_1 固定的垂直線上，MRS 為固定

單調轉換 & 邊際替代率

- 將代表一偏好關係的效用函數作單調轉換，得到另一個代表相同偏好關係的效用函數
- 作單調轉換，邊際替代率會如何?

單調轉換 & 邊際替代率

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ ，$MRS = - x_2/x_1$.
- 令 $V = U^2$;即$V(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$。 V 的 MRS 為何?

$$MRS = -\frac{\partial V / \partial x_1}{\partial V / \partial x_2} = -\frac{2x_1x_2^2}{2x_1^2x_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

同於U的MRS

單調轉換 & 邊際替代率

- 更一般地, 若$V = f(U)$，其中 f ()為一個嚴格增函數，則

$$MRS = -\frac{\partial V / \partial x_1}{\partial V / \partial x_2} = -\frac{f'(U) \times \partial U / \partial x_1}{f'(U) \times \partial U / \partial x_2}$$

$$= -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

故 **MRS** 不會因正的單調轉換而改變

單調轉換 & 邊際替代率