

# 陀螺儀

Gyroscope

# 實驗目的

## 1. 測量陀螺儀的進動率 $\Omega$

$$\Omega = \frac{\tau}{L} = \frac{mgd}{I\omega}$$

$\tau$ : 施加在陀螺儀的力矩

$L$ : 圓盤的角動量

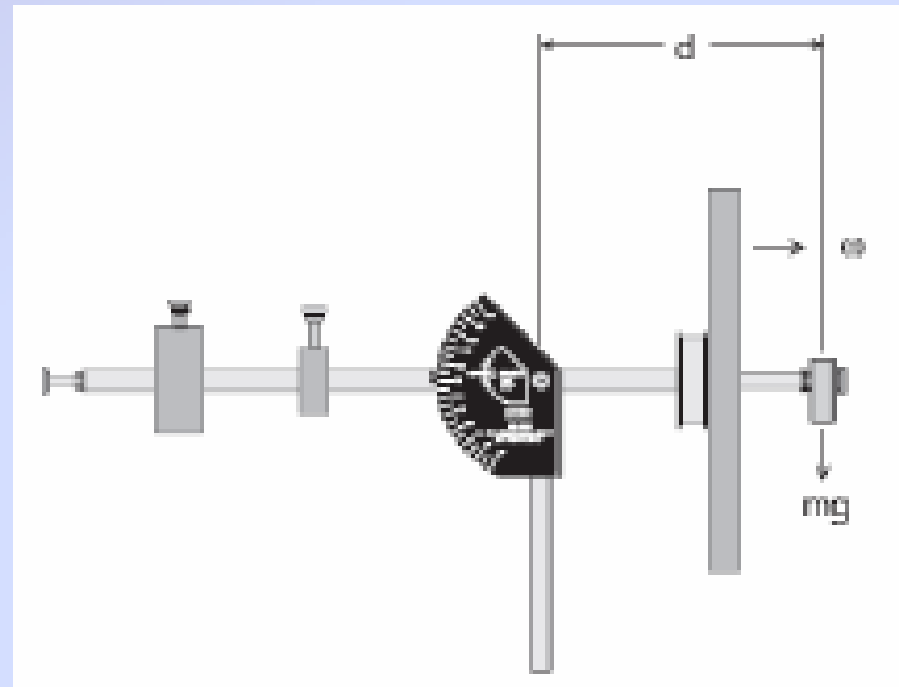
$I$ : 圓盤的轉動慣量

$\omega$ : 圓盤的角速度

$g$ : 重力加速度

$d$ : 砝碼與中心轉軸的距離

$m$ : 外加在陀螺儀軸尾端的 砝碼質量



## 陀螺儀的生活應用

- 打陀螺時，陀螺本身會持續在地上產生畫圈的進動（precession），進而維持自己的平衡、保持運動
- 以兩腳行走的機器人是利用陀螺儀可維持慣性的特質而製造
- 交通工具（如：飛機、輪船、飛彈、太空船…等）可靠陀螺儀導航與平衡

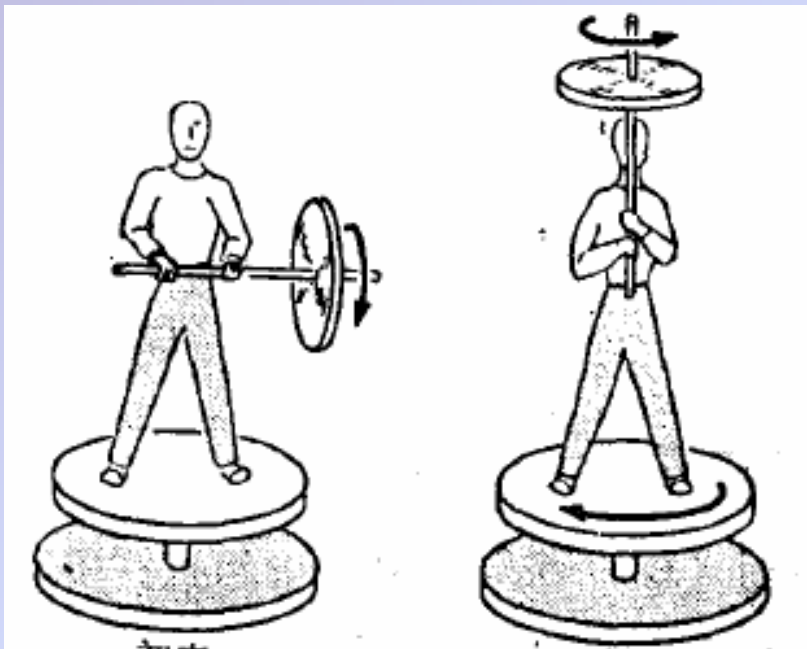


1. Traditional mechanical gyroscope.

# 實驗原理

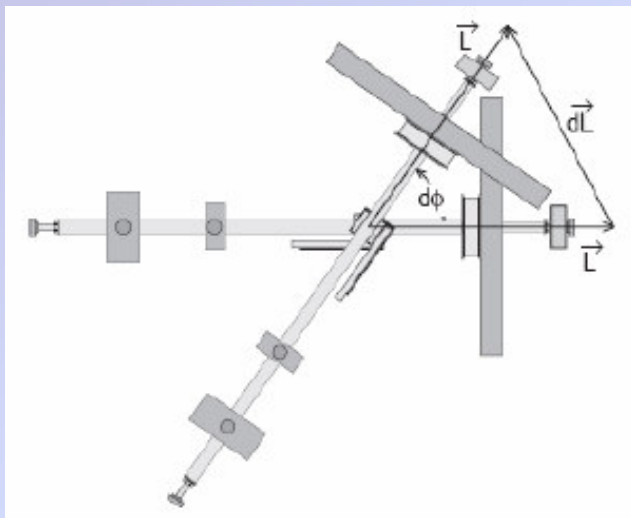
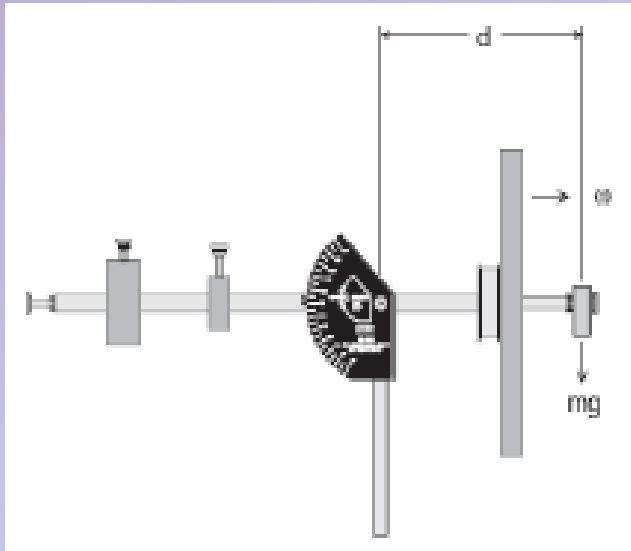
## ➤ 角動量守恆定律：

剛體所受合力矩為零時，其角動量將保持不變



例：人站在轉椅上，手拿繞水平軸轉動的輪子，此時，此系統的垂直角動量為零，若把輪軸轉到垂直方向上，則此輪即具有垂直方向的角動量，但因此系統（輪子+人+椅子）所受合力矩為零，角動量應保持不變，故人和椅子會沿與此輪角動量方向相反的方向轉動，並與輪子達成轉動平衡

# 實驗原理



- 圓盤的角動量  $L = I\omega$
- $mg$ 造成力矩  $\tau = mgd$
- 陀螺儀力矩

$$\tau = \frac{dL}{dt} \underset{d\phi \rightarrow 0}{=} \frac{Ld\phi}{dt} = L\Omega$$

$\Omega$  : 陀螺儀進動率 (角速度)

- $\tau = mgd = L\Omega$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{mgd}{L} = \frac{mgd}{I\omega}$$

# 實驗原理

$$\tau = I\alpha \Rightarrow I = \frac{\tau}{\alpha}$$

$$\tau = rF \quad \text{且} \quad \alpha = \frac{a}{r}$$

$$\sum F = mg - F = ma$$

$$\Rightarrow F = m(g - a)$$

自由落體公式

$$y = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2y}{t^2}$$

即可經由測得  $y, t$   
 $\Rightarrow a \Rightarrow F, \alpha \Rightarrow \tau \Rightarrow I$   
 $\Rightarrow \Omega$  與  $\omega$  關係

$\alpha$  : 圓盤角加速度

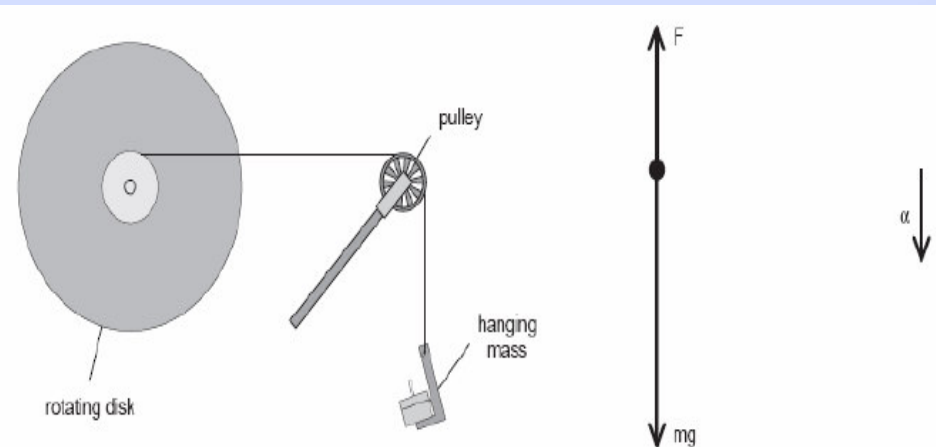
$r$  : 滑輪半徑

$y$  : 重物落下距離

$t$  : 重物落地時間

$a$  : 重物落下的加速度

$F$  : 圓盤轉動時細線的張力



# 實驗儀器

碼錶、砝碼組、陀螺儀一具、細繩



# 實驗步驟

## (一)測量圓盤的轉動慣量

1. 將轉軸固定在 $90^\circ$ 角
2. 用細繩懸掛50克砝碼，旋繞在小圓盤上，固定砝碼於桌面等高處
3. 記錄桌面到地板距離
4. 將砝碼做自由落體運動
5. 記錄落地時間
6. 重覆上述步驟5次
7. 計算圓盤轉動慣量



# 實驗步驟

## (一) 測量圓盤的轉動慣量



# 實驗數據

## 一. 測量圓盤的轉動慣量：

滑輪半徑 $r=0.032\text{m}$ ；重物質質量 $m=0.058\text{kg}$ ；

自由落體高度 $y=0.8\text{m}$

落地時間 $t(\text{s})$	<b>6.28</b>	<b>6.53</b>	<b>6.69</b>	<b>6.35</b>	<b>6.34</b>
加速度 $a(\text{m}/\text{s}^2)$	<b>0.041</b>	<b>0.038</b>	<b>0.036</b>	<b>0.040</b>	<b>0.040</b>

平均加速度  $a = \frac{2y}{t^2} = 0.039 \text{ m}/\text{s}^2$  ； 角加速度  $\alpha = \frac{a}{r} = 1.2 \text{ 1}/\text{s}^2$

細繩張力  $F = m(g - a) = 0.568 \text{ nt}$  ； 力矩  $\tau = rF = 0.018 \text{ m} \cdot \text{nt}$

盤轉動慣量  $I = \frac{\tau}{\alpha} = 0.015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

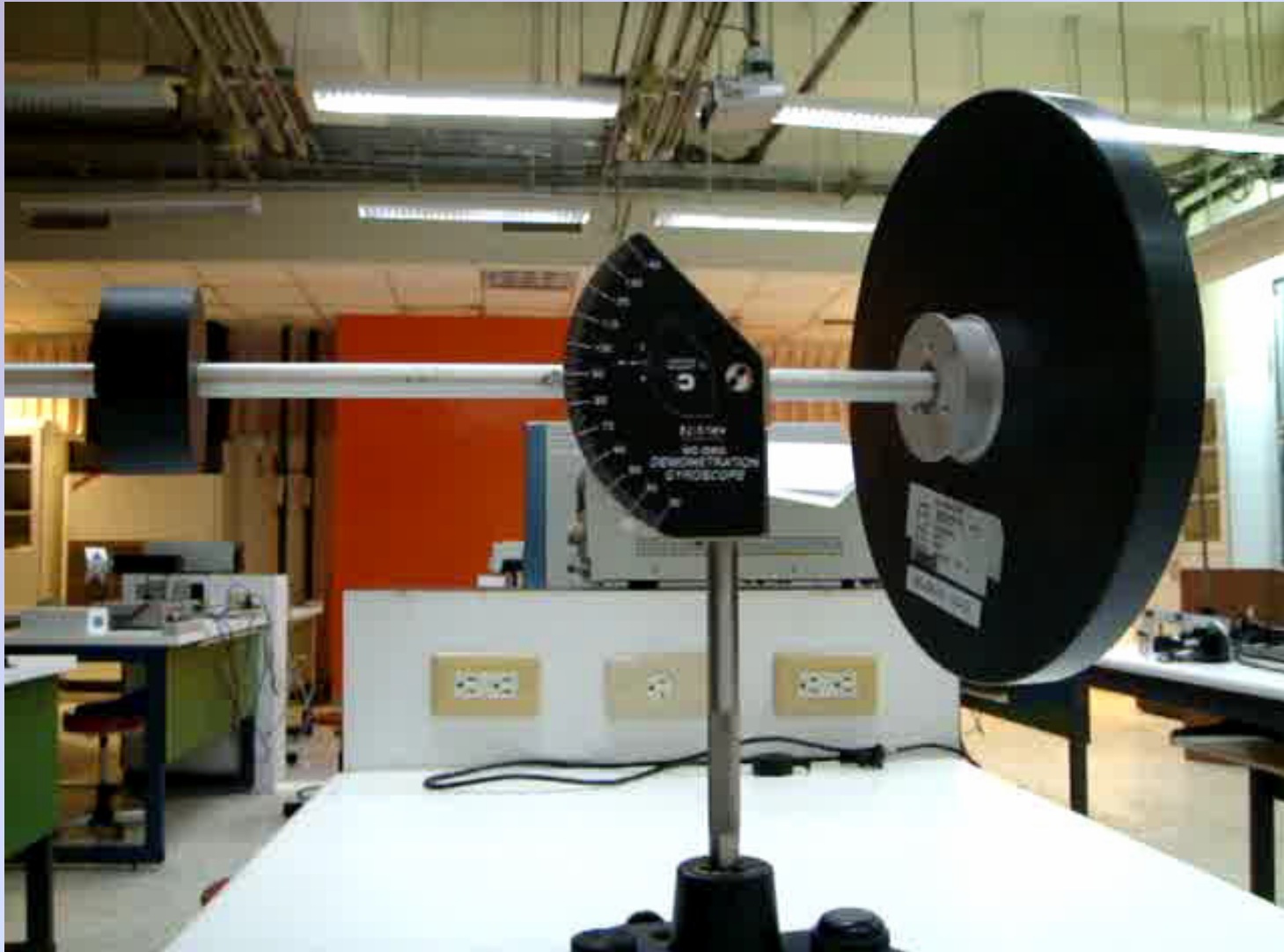
## 實驗步驟

### (二)測量進動角速度( $\omega$ 、 $\Omega$ )

1. 固定轉軸角度 ( $90^\circ$ 、 $75^\circ$ 、 $60^\circ$ )
2. 在大圓盤軸心上加小螺絲帽
3. 將砝碼從與桌面等高處靜止落下，對大圓盤施加力矩(300克砝碼)
4. 記錄砝碼落地後，大圓盤轉十圈所需時間，計算圓的角速度
5. 手放開轉軸，使陀螺儀做進動
6. 記錄陀螺儀轉1/4圈所需時間，計算陀螺儀角速度
7. 比較進動角速度理論值與實驗值

# 實驗步驟

## (二) 測量進動角速度( $\omega$ 、 $\Omega$ )



# 實驗數據

## 二. 測量進動角速度( $\omega$ 、 $\Omega$ ): 轉軸角度 $90^\circ$

砝碼質量 $m= 0.009\text{kg}$  ; 砝碼與中心轉軸距離 $d= 0.19\text{m}$

大圓盤轉10圈 時間 $t_1(\text{s})$	<b>3.50</b>	<b>3.28</b>	<b>3.38</b>	<b>3.50</b>	<b>3.43</b>
陀螺儀轉1/4圈 時間 $t_2(\text{s})$	<b>22.19</b>	<b>23.03</b>	<b>22.32</b>	<b>22.40</b>	<b>21.53</b>

大圓盤轉10圈平均時間 $t_1=3.418\text{s}$  ; 陀螺儀轉1/4圈平均時間 $t_2=22.294\text{s}$

$$\text{大圓盤角速度 } \omega_1 = \frac{2\pi \times 10}{t_1} = 18.373 \text{ } 1/\text{s}$$

$$\text{陀螺儀角速度 } \omega_2 = \frac{2\pi \times 1/4}{t_2} = 0.070 \text{ } 1/\text{s}$$

$$\text{陀螺儀角速度理論值 } \Omega = \frac{mgd}{I\omega_1} = 0.061 \text{ } 1/\text{s}$$

$$\text{誤差 } \varepsilon = \frac{|\omega_2 - \Omega|}{\Omega} \times 100\% = 14.75\%$$

# 實驗數據

## 二. 測量進動角速度( $\omega$ 、 $\Omega$ ): 轉軸角度 $75^\circ$

砝碼質量 $m= 0.009\text{kg}$  ; 砝碼與中心轉軸距離 $d= 0.19\text{m}$

大圓盤轉10圈 時間 $t_1(\text{s})$	<b>3.29</b>	<b>3.47</b>	<b>3.25</b>	<b>3.18</b>	<b>3.47</b>
陀螺儀轉1/4圈 時間 $t_2(\text{s})$	<b>27.25</b>	<b>26.84</b>	<b>29.91</b>	<b>28.41</b>	<b>27.12</b>

大圓盤轉10圈平均時間 $t_1=3.332\text{s}$  ; 陀螺儀轉1/4圈平均時間 $t_2=27.906\text{s}$

$$\text{大圓盤角速度 } \omega_1 = \frac{2\pi \times 10}{t_1} = 18.848 \text{ } 1/s$$

$$\text{陀螺儀角速度 } \omega_2 = \frac{2\pi \times 1/4}{t_2} = 0.056 \text{ } 1/s$$

$$\text{陀螺儀角速度理論值 } \Omega = \frac{mgd \sin 75^\circ}{I \omega_1 \sin 75^\circ} = 0.059 \text{ } 1/s$$

$$\text{誤差 } \varepsilon = \frac{|\omega_2 - \Omega|}{\Omega} \times 100\% = 5.08\%$$



# 實驗數據

## 二. 測量進動角速度( $\omega$ 、 $\Omega$ ): 轉軸角度 $60^\circ$

砝碼質量 $m= 0.009\text{kg}$  ; 砝碼與中心轉軸距離 $d= 0.19\text{m}$

大圓盤轉10圈 時間 $t_1(\text{s})$	<b>3.40</b>	<b>3.27</b>	<b>3.31</b>	<b>3.00</b>	<b>3.56</b>
陀螺儀轉1/4圈 時間 $t_2(\text{s})$	<b>17.41</b>	<b>18.22</b>	<b>17.22</b>	<b>17.87</b>	<b>17.56</b>

大圓盤轉10圈平均時間 $t_1=3.308\text{s}$  ; 陀螺儀轉1/4圈平均時間 $t_2=17.656\text{s}$

$$\text{大圓盤角速度 } \omega_1 = \frac{2\pi \times 10}{t_1} = 18.984 \text{ } 1/s$$

$$\text{陀螺儀角速度 } \omega_2 = \frac{2\pi \times 1/4}{t_2} = 0.089 \text{ } 1/s$$

$$\text{陀螺儀角速度理論值 } \Omega = \frac{mgd \sin 60^\circ}{I \omega_1 \sin 60^\circ} = 0.059 \text{ } 1/s$$

$$\text{誤差 } \varepsilon = \frac{|\omega_2 - \Omega|}{\Omega} \times 100\% = 50.85\%$$