

## 實驗六 RLC 串聯振盪電路實驗

### 一、目的：

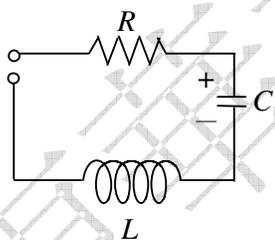
利用示波器觀察  $RLC$  串聯電路的振盪現象，並觀察系統對正弦電壓的響應。

### 二、原理：

在力學中，我們有物體在彈簧中作簡諧振盪的現象；在電路中，亦有相似的情形，可讓電流有相同的現象，此即為電磁震盪(electromagnetic oscillation)。電磁振盪的現象可由電容和電感的搭配來組成。

#### (一) $RLC$ 振盪電路：

將電容、電阻與電感串聯在一電路中，如圖一所示：



圖一

依迴路定理可得：

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{或} \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (1)$$

(1)式的一般解為：

$$q(t) = q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t + \phi\right) \quad (2)$$

在(2)式中定義  $\beta \equiv R/2L$ ,  $\omega_0^2 \equiv 1/LC$ , 則(11)式的解便可寫成：

$$q(t) = q_{\max} e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \phi\right) \quad (3)$$

$q_{\max}$  和  $\phi$  的值由起始條件決定。

由上式其  $q(t)$  之解可分為下列三種狀況來討論：

1. 次阻尼振盪(underdamping oscillation)：當電阻  $R$  相當

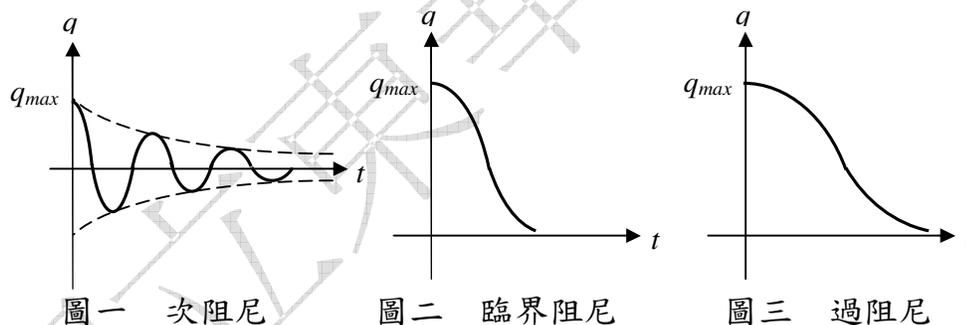
小，也就是  $\beta^2 < \omega_0^2$  時，則電路以阻尼振盪的方式振盪。當電荷在電路中來回振盪的時候，在通過電阻時，會消耗電磁能而變成熱能，使得振盪的振幅隨著時間而遞減，如圖二所示。

在(3)式中定義  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  為阻尼振盪頻率。

在這種振盪下，其振幅為  $q_{\max} e^{-\beta t}$ ，會隨著時間的增加而以指數函數變小，故此電路稱為次阻尼振盪。

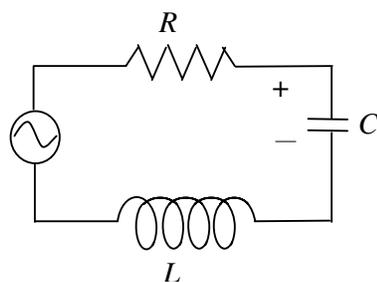
2. 臨界阻尼振盪(critical damping oscillation)：在電阻  $R$  達到某個夠大的值時，也就是  $\beta^2 = \omega_0^2$ ，由(3)式可得  $q(t) = q_{\max} e^{-\beta t} \cos \phi$ ，此時電路不再振盪，而是隨著時間的增加而以指數函數變小，故此電路稱為臨界阻尼振盪，如圖三所示。
3. 過阻尼振盪(overdamping oscillation)：若用更大的電阻  $R$ ，也就是  $\beta^2 > \omega_0^2$ ，此時電路是過阻尼的，如圖四所示。

在臨界阻尼振盪以及過阻尼振盪中，電容器上電荷不再有振盪現象，而是逐漸減少趨近於零。



## (二) RLC 強迫振盪串聯交流電路：

將電容、電阻、電感及交流電源串聯在一電路中，如圖四所示：



圖四

首先列出各元件之交流電流、電壓之相和振幅的關係：

元件	阻抗	電流 $i$ 的相	相常數 $\phi$	振幅的關係
<b>R</b>	$R$	與 $v_R$ 同相	0	$V_R = I_R R$
<b>L</b>	$X_L = \omega L$	落後 $v_L$	$\pi/2$	$V_L = I_L X_L$
<b>C</b>	$X_C = 1/\omega C$	超前 $v_C$	$-\pi/2$	$V_C = I_C X_C$

其中  $v_R$ 、 $v_L$ 、 $v_C$  為元件之瞬時電壓， $V_R$ 、 $V_L$ 、 $V_C$ 、 $I_R$ 、 $I_L$ 、 $I_C$  為各元件相對之振幅。根據以上之迴路，交流發電機所供應的瞬時交流電動勢為

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t \quad (4)$$

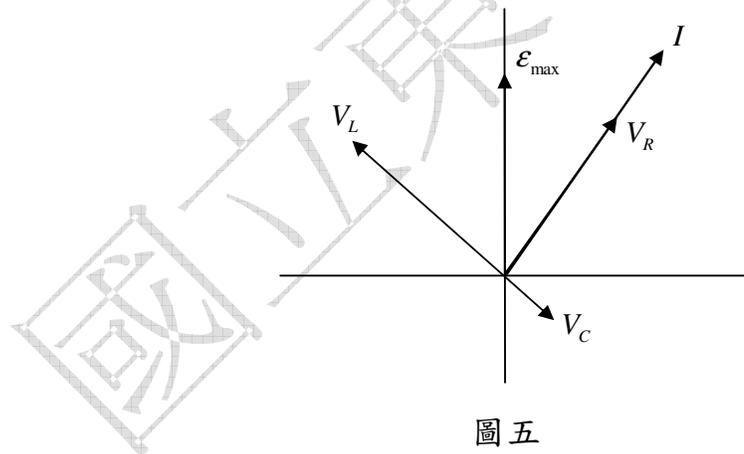
而瞬時交流電流為

$$i = I \sin(\omega t - \phi) \quad (5)$$

整個迴路上的電壓為

$$\mathcal{E} = v_R + v_L + v_C \quad (6)$$

根據上表將各元件之相位圖畫在一起，如圖五：



圖五

由畢氏定理可得知

$$\mathcal{E}_{\max}^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \quad (7)$$

串聯電路中，各元件之電位差皆隨著相位改變，但是其電流都是相同的，此  $I_R = I_L = I_C = I$ 。再把上表中各元件之振幅關係式代入(7)式可得  $RLC$  串聯電路之振幅：

$$I = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (8)$$

其中，(8)式的分母可定義為該串聯電路的總阻抗，再將上表各元件之阻抗代入，可得

$$I = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (9)$$

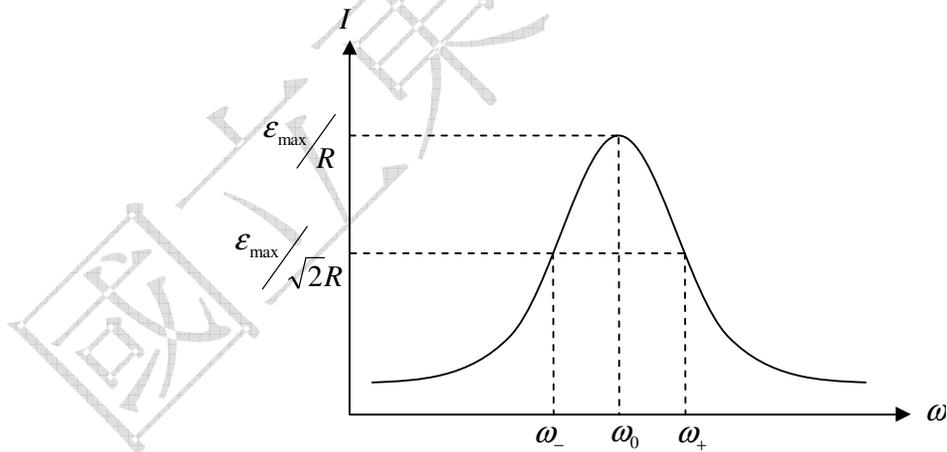
當(9)式的分母為最小值時，即

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (10)$$

可得  $I$  最大值為  $\varepsilon_{\max}/R$ ，此時電路處於共振狀態，可定義

$$\omega_0 = \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (11)$$

$\omega_0$  為自然共振頻率。注意，在共振狀態下，可以觀察到訊號產生器的操作頻率正好和自然共振頻率相同。此時再將(9)式繪出  $I-\omega$  圖，將會得到如下之圖六：



圖六

在這個圖中，我們可以定義  $RLC$  電路的頻寬。振盪線路對頻率選擇的靈敏度常以頻寬(bandwidth)來表示。此時定義  $\omega_-$  和  $\omega_+$  為最大電流降到  $\varepsilon_{\max}/\sqrt{2}R$  時的頻率，而  $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ ， $\Delta\omega$  正是此電路的頻寬。因此  $\omega_{\pm}$  必滿足下式：

$$\frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{2}R} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \omega_{\pm} = \frac{\pm R + \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{2L} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{R}{L} \quad (14)$$

而交流電路平均功率  $P$  之計算方法為

$$P = \frac{1}{2} IV \cos\phi \quad (15)$$

其中， $\cos\phi$  稱之為功率因數(power factor)。因此，電路中的平均功率可寫為

$$P = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{2\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (16)$$

其中，功率大都消耗在電阻器上，電容以及電感的平均消耗功率可以幾乎說是零。

### 三、儀器：

示波器一台、數個電阻、數個電容、數個電感、數個可變電阻、交流訊號產生器。

### 注意事項：

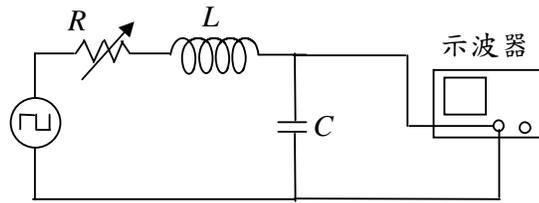
1. 記得檢查各元件是否正常，以免影響實驗進行。

### 四、步驟：

(一)用示波器觀察  $RLC$  之阻尼振盪：

1. 將可變電阻、電感器、電容器與訊號產生器及示波器連接，如圖七所示。
2. 使訊號產生器的輸出為方波，將調整可變電阻之大小，畫出過阻尼振盪、臨界阻尼振盪、次阻尼振盪之波形。
3. 把可變電阻調整到臨界阻尼振盪，量電阻值，觀察  $(R/2L)^2 = 1/LC$  是

否成立。



圖七

(二)RLC 電路對正弦電壓的反應：

1. 以正弦波驅動電路，電阻調整到  $2.5k\Omega$ 。
2. 調整正弦波的頻率，繪出  $\omega-I$  圖，找出  $\omega_0$ 、 $\omega_-$ 、 $\omega_+$ 、 $\Delta\omega$ 。
3. 調整電阻到  $1.25k\Omega$ ，重複實驗。

(三)能量的消耗：

1. 以正弦波驅動 RLC 電路。
2. 測量電流和訊號產生器電壓的相位差，並計算訊號產生器的功率。
3. 測量電流、電阻、電容、電感的相位差，並計算各元件消耗的功率。
4. 驗證整的電路是否能量守恆。

五、問題：

1. 證明 L/C 的因次和 R 的因次相同。
2. 當訊號產生器未接上電路前，用示波器觀察輸出波型時是完整的方波。但是接上電路以後，再觀察訊號產生器產生的波型時，卻變成不是完美的方波了，為何會有這種現象的產生？
3. 不同的電阻對於  $\omega-I$  圖有何影響？差異點在哪裡？

六、討論：