力學振盪實驗

一、 目的：

利用 rotary motion sensor 來觀察簡諧振盪、阻尼振盪、強迫振盪的運動狀態。

二、 原理：

(一)簡諧振盪(simple harmonic oscillation)：

在一般的彈簧系統中，一個物體如離開平衡點時，根據虎克定律其所受到的恢復力為

$$F = -kx \tag{1}$$

根據牛頓第二運動定律可得到

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{2}$$

令 $\omega_0{}^2 = k/m$ 代入(2)式，並可解得一理想狀況之簡諧振盪方程式

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{3}$$

其中，k 為彈力係數；ω_0 為振盪頻率；x_0 為最大位移；ϕ 為相位角。x_0 、ϕ 兩常數都是根據運動起始狀況來訂的。

(二)阻尼振盪(damped oscillation)：

在上述之簡諧振盪中，其所討論的是理想狀況的運動。因為物體在運動中除了受到彈簧的恢復力以外，還會受到一阻力 f 。其阻力與運動速度 v 成正比，可寫成

$$f = m\lambda v = m\lambda\frac{dx}{dt} \tag{4}$$

再將(4)式代入(2)式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx - m\lambda\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{6}$$

由(6)式可得到一符合現實狀況之振盪方程式

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cos[(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}})t + \phi] \tag{7}$$

根據(7)式可歸納出以下三種不一樣的圖形：

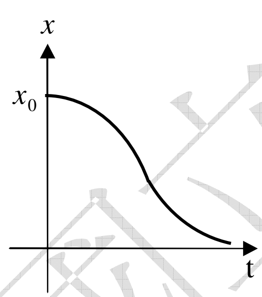
(i) 若 $\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4} < 0$ 時，此振盪稱之為過阻尼振盪(overdamping oscillation)。 此時物體不做往復運動，而隨時間漸漸趨向平衡點，如圖一。

(ii)若 $\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0$ 時，此振盪稱之為臨界阻尼振盪(critical damping oscillation)。此時物體不做往復運動，而隨時間漸漸趨向平衡點，但是速度較過阻尼振盪較快，如圖二。

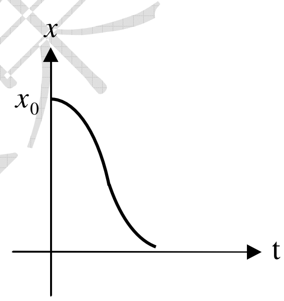
(iii)若 $\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4} > 0$ 時，此振盪稱之為次阻尼振盪(underdamping oscillation)。此時物體做往復振盪，但是每振盪一次其最振幅便會減小，其振幅大小事隨著時間成指數函數遞減，如圖三。此時定義半衰期 $T_{1/2}$ 為 x 降到 $x_0/2$ 所需的時間，因此根據(7)式可求得半衰期 $T_{1/2}$ 為

$$T = \frac{2}{\lambda}\ln(2) \tag{8}$$

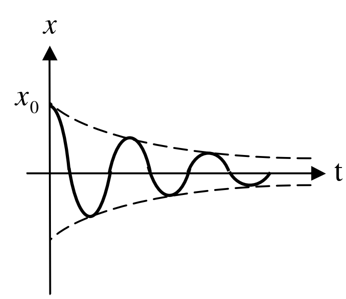
此時再根據實驗所得的振盪圖形便可計算阻尼係數 λ。



圖一 過阻尼振盪



圖二 臨界阻尼振盪



圖三 次阻尼振盪

(三)強迫振盪(force oscillation)：

如果物體在振盪中再加上一周期性外力 f' 去驅動的話便可讓振盪一直持續下去並不會停止。此外力可寫為

$$f' = f_0 \cos\omega t \tag{9}$$

其中，f_0 為外力最大振幅。

再經由(2)式可得強迫振盪之運動方程式為

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\lambda\frac{dx}{dt} + f_0\cos\omega t \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \lambda\frac{dx}{dt} = \frac{f_0}{m}\cos\omega t \tag{11}$$

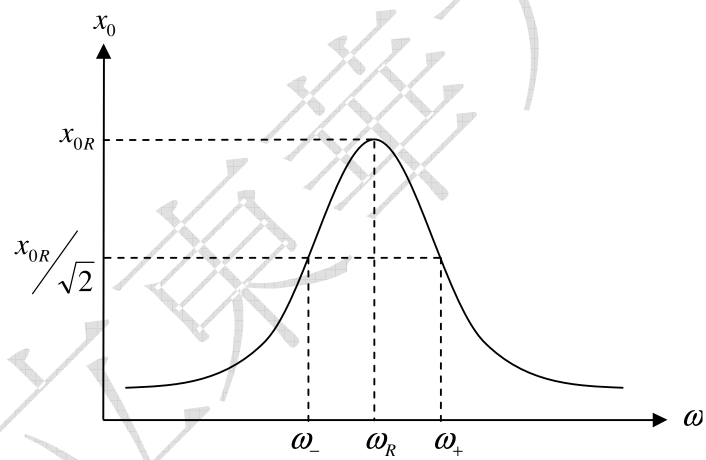
解(11)式可得

$$x(t) = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\lambda^2}}\cos[\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega\lambda}{(\omega_0^2-\omega^2)}] \tag{12}$$

此時，令

$$x_0 = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\lambda^2}} \tag{13}$$

根據(13)式繪出 x_0 與 ω 之關係圖形，如圖四所示：



圖四

再根據(13)式，當共振振幅 x_0 為最大值時，其共振頻率 ω_R 可求得為

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{2}} \tag{14}$$

當 $\lambda << \omega_0$ 時，$\omega_R \approx \omega_0$，其共振振幅 x_{0R} 為

$$x_{0R} = \frac{f_0}{m\omega_0\lambda} \tag{15}$$

再定義 $\omega_\pm$ 為振幅降到共振振幅的 $1/\sqrt{2}$ 時所對應的頻率，此時可定義出振盪器的頻寬為 $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$，而一般在討論阻尼振盪器

時會用品質因子(quality factor)來表示其振盪器對阻尼的反應情形，其品質因子可寫為

$$Q = \frac{\omega_R}{\lambda} \tag{17}$$

當λ很小時，再由(13)式可得知，$\Delta\omega \approx \lambda$，因此(17)式可改寫為

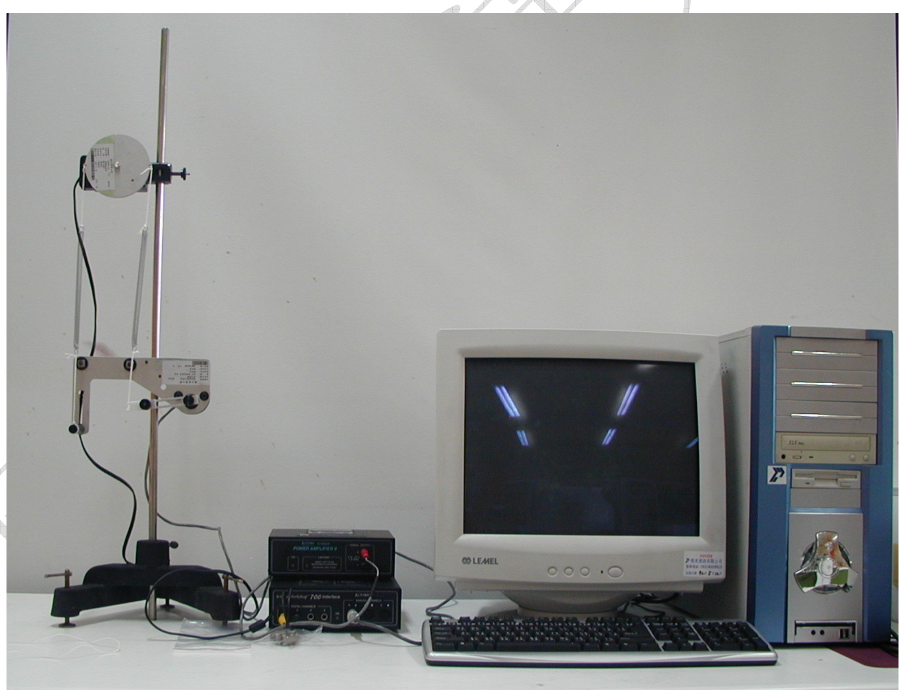
$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{18}$$

三、 儀器：

rotary motion sensor 一台、電腦一部、彈簧一對。

四、 步驟：

1. 實驗裝置如圖五。



圖五　實驗裝置

2. 利用電子秤去測量待測物的重量，並計算兩彈簧之彈力常數。
3. 架設儀器完成後將電腦打開，在 rotary motion sensor 視窗設定 1440 div/turn，在 power amplifier II 設定輸出電壓 2.0V 以下，頻率在 0.3~3Hz 中，並先選擇 off。

4. 測定自由振盪，對鋁板施一小力，繪出 x-t 圖，求 λ、ω_0。
5. 測定阻尼振盪，在鋁板後加一強力磁鐵，對鋁板施一小力，繪出 x-t 圖，求 λ、ω_0。
6. 測定強迫振盪，改變頻率大小，並把 off 改成 auto，對鋁板施一小力，繪出 x-t 圖，求 ω_R、Q。
7. 測定強迫振盪，改變頻率大小，並把 off 改成 auto，在鋁板後加一強力磁鐵，並對鋁板施一小力，繪出 x-t 圖，求 ω_R、Q。

五、 問題：

1. 證明 λ 很小時，如何由(13)式推導出 $\Delta\omega \approx \lambda$？
2. 兩彈簧之動態彈性係數與靜態彈性係數有何不同？何者較適合用在本實驗？
3. 圓形鋁片的擺角大小與實驗結果是否有關？

六、 討論：