

普通物理實驗報告

實驗七 簡諧運動

組別：第一組

姓名：林小儀、曾小逸

系級：生科系一年級、物理系一年級

學號：9713123、9714456

實驗日期：2008年10月14日

一、實驗目的：

(註：此節包含於手寫之預習報告中，請參考實驗課本內容)

二、實驗原理

(註：此節包含於手寫之預習報告中，請參考實驗課本內容)

三、實驗儀器：

(註：此節包含於手寫之預習報告中，請參考實驗課本內容)

四、實驗步驟：

(註：此節包含於手寫之預習報告中，請參考實驗課本內容)

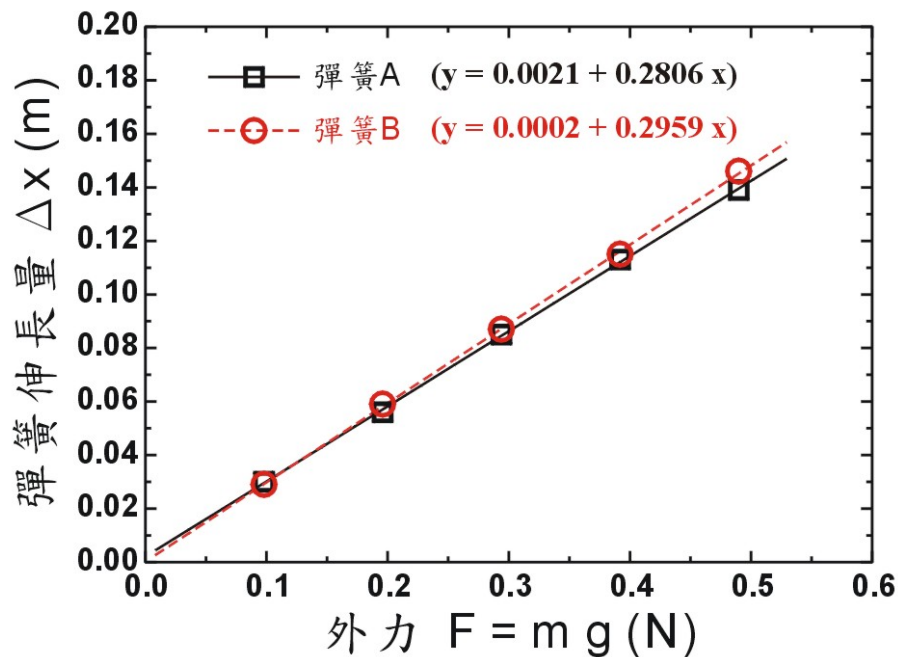
五、實驗數據：

(註：此節將實驗得到的原始數據數據重新整理，每位同學應自行整理數據，不可與同組組員共用。有助教簽名之原始數據或其影本仍須附於報告最後面)

5-1 彈簧伸長量 Δx 與外力 F 的關係：

	1	2	3	4	5
外力 $F = m g$ (N)	0.098	0.196	0.294	0.392	0.490
彈簧 A 伸長量 Δx (m)	0.030	0.056	0.085	0.113	0.139
彈簧 B 伸長量 Δx (m)	0.029	0.059	0.087	0.115	0.146

表(一) 彈簧 A 與 B 的伸長量 Δx 隨外力 F 的變化。

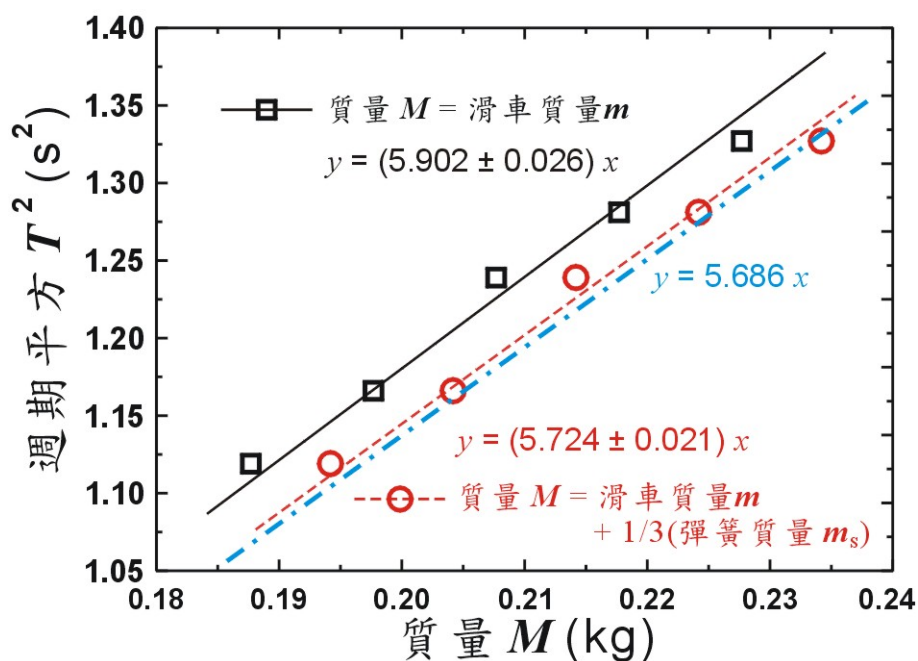


圖(一) 彈簧伸長量 Δx 與外力 F 的關係。

5-2 週期 T 與滑車質量 m 的關係：

	1	2	3	4	5
$M =$ 滑車質量 m (kg)	0.1877	0.1977	0.2077	0.2177	0.2277
$M = m + 1/3 m_s$ (kg)	0.1942	0.2042	0.2142	0.2242	0.2342
左半週期 T_L (s)	0.526	0.538	0.555	0.563	0.580
右半週期 T_R (s)	0.532	0.542	0.558	0.569	0.572
總週期 $T = T_L + T_R$ (s)	1.058	1.080	1.113	1.132	1.152
T^2 (s^2)	1.119	1.166	1.239	1.281	1.327
有效振盪質量 $M_{eff} = T^2 k / 4\pi^2$ (kg)	0.197	0.205	0.218	0.225	0.233

表(二) 週期 T 隨滑車質量 m 的變化。滑車兩端的兩個彈簧，其質量總和為 $m_s = 19.4$ g。彈力係數 $k = 6.94$ N/m。



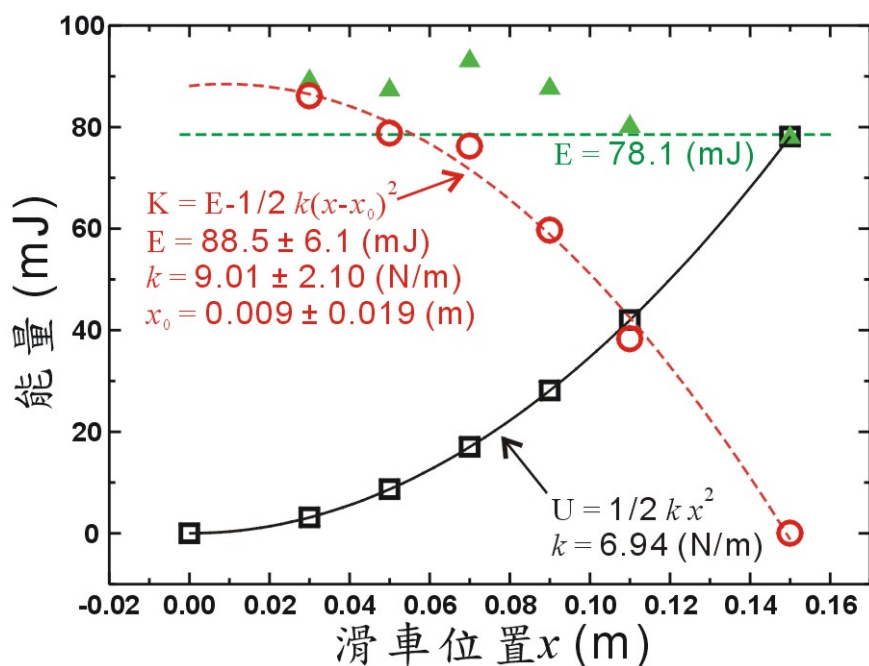
圖(二) 週期平方 T^2 與振盪質量 M 的關係。方形：振盪質量 M 僅考慮滑車質量 m ($M = m$)。圓圈：振盪質量 M 考慮滑車質量 m 與有效彈簧質量 $1/3 m_s$ ($M = m + m_s/3$)。藍色線為 $T^2 = \frac{4\pi^2}{k} M$ 的理論線，其中彈力係數 $k = 6.94$ N/m。

5-3 驗證能量守恆定律：

	1	2	3	4	5	6
滑車位置 x (m)	0.030	0.050	0.070	0.090	0.110	0.150
位能 $U = 1/2 k x^2$ (mJ)	3.124	8.679	17.01	28.12	42.01	78.11
速度 v (m/s)	0.942	0.901	0.886	0.784	0.628	0
動能 $K = 1/2 m_{eff} v^2$ (mJ)	86.15	78.81	76.21	59.67	38.29	0
總能 $E = U + K$ (mJ)	89.27	87.49	93.22	87.79	80.30	78.11
能量相對誤差(%)*	8.3 %	6.5 %	14.0 %	8.2 %	0.1 %	--
理論速率						
$v = \sqrt{\frac{2}{m_{eff}}(E - \frac{1}{2} k x^2)}$ (m/s)	0.879	0.8461	0.793	0.718	0.610	0.019
速率相對誤差(%)	7.2 %	6.5 %	11.7 %	9.2 %	3.0 %	--

表(三) 位能 U 與動能 K 隨滑車位置 x 的關係。滑車的振幅為 15 cm。彈力係數 $k = 6.94$ N/m。滑車質量 $m = 187.7$ g。滑車兩端的兩個彈簧質量和為 $m_s = 19.4$ g。有效質量 $m_{eff} = m + 1/3 m_s = 194.2$ g。

* 以伸長量 $\Delta x = 0.15$ m 的結果作為比較的基準。



(圖三) 位能 U 、動能 K 與總能量 E 隨滑車位置 x 的變化。

六、結果與討論：

(表一)顯示彈簧 A 與彈簧 B 在 5 種不同外力 F 下的伸長量 Δx 。此 5 種外力分別由 10.0 - 50.0 g 的砝碼提供，換算成牛頓單位為 0.098 - 0.490 N (假設重力常數 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，砝碼質量與其標示精確無誤)。由虎克定律 $F = k \Delta x$ 可求得彈簧 A 與彈簧 B 的彈力係數 k 。圖一顯示兩彈簧的伸長量 Δx 與外力 F 的關係圖。

由於 $\Delta x = \frac{1}{k} F$ ，因此 $\Delta x - F$ 圖中的斜率即為彈力係數的倒數 $1/k$ 。由(圖一)可知，彈簧 A 與彈簧 B 在 $\Delta x - F$ 圖中的斜率分別為 0.2806 ± 0.0031 與

$0.2959 \pm 0.0031 \text{ m/N}$ ，因此其彈力係數分別為 $k_A = 3.56 \pm 0.04 \text{ N/m}$ 與 $k_B = 3.38 \pm 0.04 \text{ m/N}$ 。

(圖一)中，彈簧 A 與彈簧 B 的 $\Delta x - F$ 關係雖呈現線性關係，但是其關係線並沒有通過原點圖，此可能來自實驗誤差或是彈簧本身的非線性。以彈簧 A 為例，伸長量從 0.000 到 0.030 m 的平均力常數 $k_A \sim 3.27 \text{ N/m}$ ，但是伸長量從 0.113 到 0.139 m 的平均力常數卻些微增加至 $k_A \sim 3.77 \text{ N/m}$ 。相似的情形亦發生在彈簧 B。因此，彈簧在伸長量 Δx 較小時，其彈力係數 k 也相對較小一些。此造成(圖一)中的 $\Delta x - F$ 線性關係不會通過原點。由於後續的滑車簡諧振盪實驗中，彈簧的伸長量在 0.03 - 0.20 m 之間變化，因此我們計算彈力係數 k 時忽略擬合函數(此例中為： $y = a + bx$)中的常數項 a ，直接取斜率 b 做計算。

當滑車(質量 $m = 187.7 \text{ g}$) 兩端以彈簧 A 與彈簧 B 固定時，其位移量 Δx 與回復力 F 之間的關係為 $F = k_A \Delta x + k_B \Delta x = (k_A + k_B) \Delta x = k \Delta x$ ，亦即系統的力常數為 $k = (k_A + k_B) = (3.56 \pm 0.04) + (3.38 \pm 0.04) \text{ m/N} = 6.94 \pm 0.05 \text{ N/m}$ 。

將滑車從平衡點推移約 10 cm 使其自由振盪，由置於平衡點位置上方的光電計時器可量得滑車在自由振盪時，左半個振盪的週期 T_L 與右半個振盪的週期 T_R 。總週期為 $T = T_L + T_R$ 。(表二)為 5 種不同滑車質量下的振盪週期變化的實驗數據。此 5 種不同滑車質量分別為滑車本身加上 0 - 40 g 的砝碼於車上組成。由於週期 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ (參考問題 2 解答)，因此週期平方 T^2 正比於振盪質量 M 。

(圖二)顯示週期平方 T^2 與振盪質量 M 之間的關係圖。其中，黑色方形數據點為考慮振盪質量 $M = \text{滑車質量 } m$ 時。紅色圓圈數據點為考慮振盪質量 $M = \text{滑車質量 } m + 1/3 \text{ 彈簧質量 } m_s$ 時。此兩數據皆顯示週期平方 T^2 與振盪質量 M 符合正比關係，然而，兩者的斜率不同。前者的斜率為 $5.902 \pm 0.026 \text{ s}^2/\text{kg}$ ，後者為 $5.724 \pm 0.021 \text{ s}^2/\text{kg}$ 。因為 $T^2 - M$ 圖的斜率代表 $4\pi^2/k$ ，因此以系統的彈力係數 $k = 6.94 \pm 0.05 \text{ N/m}$ 計算， $T^2 - M$ 圖的斜率應為 $5.69 \pm 0.30 \text{ s}^2/\text{kg}$ (如藍色線所示)。因此，實驗結果顯示振盪質量 M 接近於 $m + 1/3 m_s$ 。此與理論計算結果一致(如問題 2 解答所述)。其誤差僅約 $(5.724 - 5.686)/5.686 \times 100\% = 0.7\%$ 。若不考慮彈簧質量，則誤差達 $(5.902 - 5.686)/5.686 \times 100\% = 3.8\%$ 。

利用光電計時器，可以測得滑車振盪時，其在不同振盪位置的瞬間速率，並

由此得到此瞬間的動能 K 。表(三)顯示位能 U 與動能 K 隨滑車位置 x 的關係。其中，動能 $K = 1/2 m_{eff} v^2$ 為實驗測得。其中 v 為滑車瞬時速率， $m_{eff} = m + 1/3 m_s$ 為滑車的有效振盪質量，如前面討論所得。位能 $U = 1/2 k x^2$ 乃由理論計算所得。按照能量守恆，總能 $E = U + K$ 為一常數。由於實驗時均固定振幅 $A = 15.0$ cm，因此，總能量 E 應等於 $1/2 k A^2 = 78.1$ mJ。圖三為位能 U 、動能 K 與總能量 E 隨滑車位置 x 的變化，其顯示動能與位能會互相轉換，使總能量守恆。當滑車位置 x 較接近轉折點($x = A$)時(亦即滑車速率相對較低時)，誤差較小。相對的，當滑車位置 x 較接近平衡點($x = 0$)時，滑車速率相對較高，誤差亦較大。這有可能是當滑車速率較高時，速率的量測相對誤差較大，且因 $K = 1/2 m_{eff} v^2$ ，速度的誤差也會因開平方的關係而放大。由表三所示的計算結果可知，能量誤差最多達 14%。速率的誤差約在 3% - 12%。由於所有的速率誤差均為正值，顯示光電計時器所量得的速率可能比實際值大一些。這可能與光電計時器的反應時間或感測用的雷射光束大小有關。

七、結論：

本實驗驗證了滑車振盪時，應將彈簧的質量也考慮進去，亦即採用振盪系統的有效質量 $m_{eff} = m + 1/3 m_s$ 。此外，振盪時的動能位能會互相轉換，但維持能量守恆。

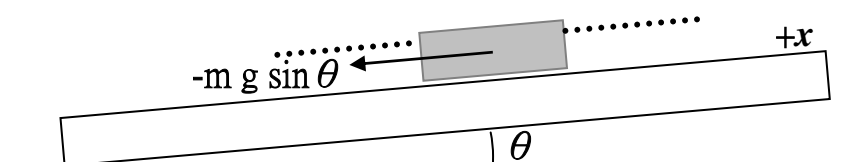
八、心得：

(略)

九、問題：

問題 (1) 空氣軌道若不平，對實驗會有何影響？

答：如果空氣軌道沒有保持水平，就會使得左右彈簧受到 $-m g \sin \theta$ 的作用力，其中 m 為滑車質量， $g \sim 9.8 \text{ m/s}^2$ 為重力加速度， θ 為軌道傾斜的角度(如下圖)。



若彈簧本身的質量忽略不計，則滑車的平衡點會產生 $x_0 = (-m g \sin \theta) / k$ 的位移量。系統的力常數 $k = k_L + k_R$ 為左右兩彈簧各別的力常數(k_L 、 k_R)的和。假設系統的力常數為定值(不隨滑車位置改變)，且傾斜造成的作用力為一常數，則軌道

傾斜將不會影響簡諧振盪的運動週期。這結果可由下列運動方程式得知：

$$F = -kx - mg \sin \theta = m \frac{d^2}{dt^2} x$$

$$\rightarrow \frac{m}{k} \frac{d^2}{dt^2} x + x + mg \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dt^2} x + \frac{k}{m} x + kg \sin \theta = 0$$

假設一新函數 $x' = x + mg \sin \theta / k$ ，則上式變成

$$\frac{d^2}{dt^2} (x' - mg \sin \theta / k) + \frac{k}{m} (x' - mg \sin \theta / k) + kg \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dt^2} x' - \frac{d^2}{dt^2} (mg \sin \theta / k) + \frac{k}{m} x' - \frac{k}{m} (mg \sin \theta) + kg \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dt^2} x' + \frac{k}{m} x' = 0$$

此為以 $x' = 0$ 為原點， $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{k/m}$ 為角頻率的簡諧運動。

因此，軌道傾斜時角頻率仍是 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{k/m}$ ，與沒有傾斜時一樣。但是平衡點

位置變成 $x' = x + mg \sin \theta / k = 0$ ，亦即新平衡點的位置為 $x = -mg \sin \theta / k$ 。

問題 (2) 如果彈簧的質量 m_s 不可忽略的話，且在運動中彈簧的伸長量若是均勻

的，試證明週期 T 應為 $T = 2\pi \sqrt{\left(m + \frac{1}{3}m_s\right) / k}$ 。(利用 $v_i = (x/l)v$ ，式中 x 為彈

簧伸長量， l 為彈簧長度， v 為平衡點速度。)

答：

Ans:

不考慮彈簧質量時，滑車通過平衡點時的動能為

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{2m\pi^2 A^2}{2T^2}。$$

由於能量守恆，此能量等於滑車由平衡點運動至轉折點間的位能變化

$$K = U = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\text{因此 } U = \frac{1}{2}kA^2 = K = \frac{2m\pi^2 A^2}{T^2} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{m/k}。$$

當考慮彈簧質量 m_s 時，滑車通過平衡點時的動能變為

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\int v^2 dm_s = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\int_0^l [(x/l)v]^2 \rho dx \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 / l^2 \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 / l^2 \frac{1}{3}l^3 \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}l\rho\right)v^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)v^2 = \frac{2\pi^2 A^2}{T^2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)
\end{aligned}$$

式中 $\rho = m_s / l$ 為彈簧的線密度。

$$\text{因此 } U = \frac{1}{2}kA^2 = K = \frac{2\pi^2 A^2}{T^2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right) \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)/k}。$$

問題 (3) 如果 T^2 - m 圖是一條直線是否能說明已經完全證明(4)式？

答：(略)。

問題 (4) 做簡諧運動的滑車終將會停止，請找出至少兩個會使滑車停止運動的原因。

答：(略)。

問題 (5) 為什麼彈簧的實際質量比推算的有效質量大很多？

答：(略)。