

簡諧運動 (simple harmonic motion, SHM)

一、目的：

觀察滑車-彈簧系統的簡諧振盪運動，驗證各物理量間的關聯及能量守恆。

二、原理：

在一個由物體與彈簧組成的振盪系統中，當物體離開平衡位置時物體會受彈簧恢復力作用而來回振盪。考慮理想狀態(無阻力)之一維運動，不計彈簧的質量 m_s ，且當彈簧伸長範圍不超過彈性極限時彈簧拉力可由虎克定律 $F = -kx$ 描述，此時物體之運動方程式可表示為：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

(1)式中， m 是物體質量； k 為彈簧力常數； t 為時間。(1)式的解可表示成：

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

此週期性運動稱為簡諧運動(simple harmonic motion, SHM)。(2)式中， A 為運動中最大的位移，稱為振幅(amplitude)； ω 為角頻率； ϕ 為物體運動的起始相位。振幅 A 和起始相位 ϕ 可由起始條件($t = t_0$ 時)的運動狀態決定。在知道位移函數 $x(t)$ 後，運動中的其他物理量，像速度、動能、位能等，都能由此求出。

角頻率 ω 與物體質量 m 及彈簧常數 k 有關。若我們將(2)式代入(1)式中可以得到 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，而週期 T 則為：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

(3)式中的週期公式是在理想狀態且不計彈簧質量的情況下求得的。若考慮彈簧質量 m_s 不為零，且彈簧伸長時是整體均勻伸展(不考慮其頭尾彎鉤)，則週期可修正為：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}} \quad (4)$$

在彈簧質量 m_s 不變的情況下，改變滑車的質量 m ，可測得相對應之週期 T ，作 $T^2 - m$ 圖。由(4)式可得

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m + \frac{4\pi^2}{3k} m_s \quad (5)$$

則 $T^2 - m$ 圖應為一直線，其斜率為 $\frac{4\pi^2}{k}$ ，截距為 $\frac{4\pi^2 m_s}{3k}$ 。理論上可由此算出

k 值與 m_s 值。

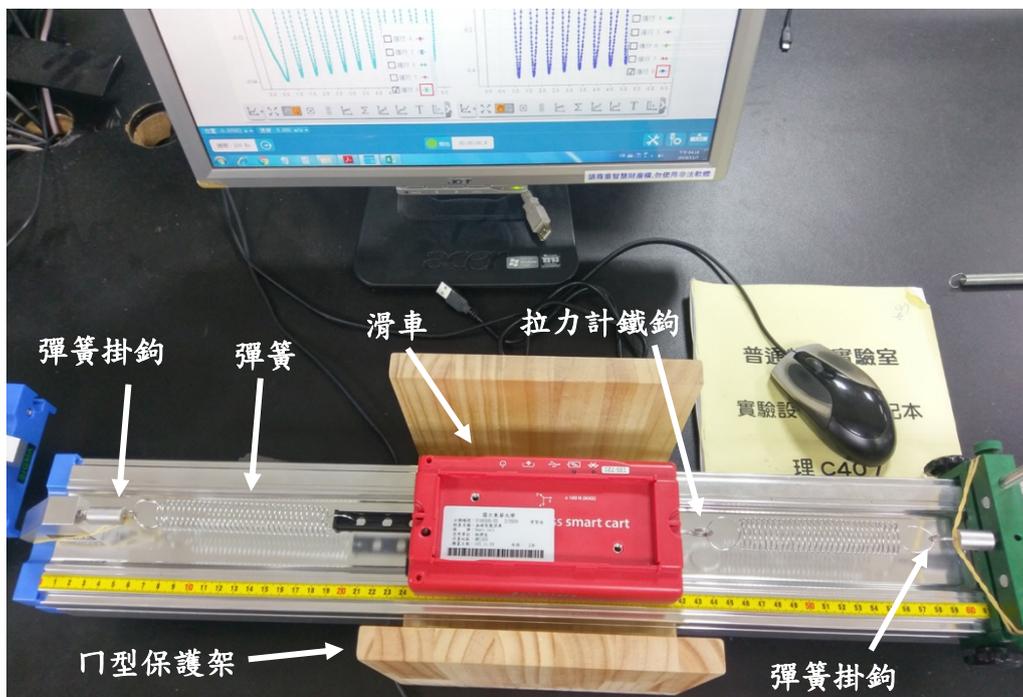
簡諧運動中的物體，其動能及位能不斷交替變化，但能量總和不變，其滿足能量守恆定律，即：

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{x0}^2 = \text{常數} \quad (6)$$

(6)式中 x 為任意位置至平衡點的距離， v_x 為在 x 位置的速率， v_{x0} 為物體通過平衡點($x=0$)時的速率， A 為振幅， $\frac{1}{2}kA^2$ 為系統最大位能， $\frac{1}{2}mv_{x0}^2$ 為系統最大動能。

三、儀器：

滑車(智慧型滑車)、軌道、 Γ 型保護架、彈簧 2 條、彈簧掛鉤組、砝碼、數據擷取軟體(SPARKvue)。各部分組合方式可參考圖一。



圖一、簡諧運動裝置圖。

四、步驟：

(一) 測量彈簧常數 k (spring constant)

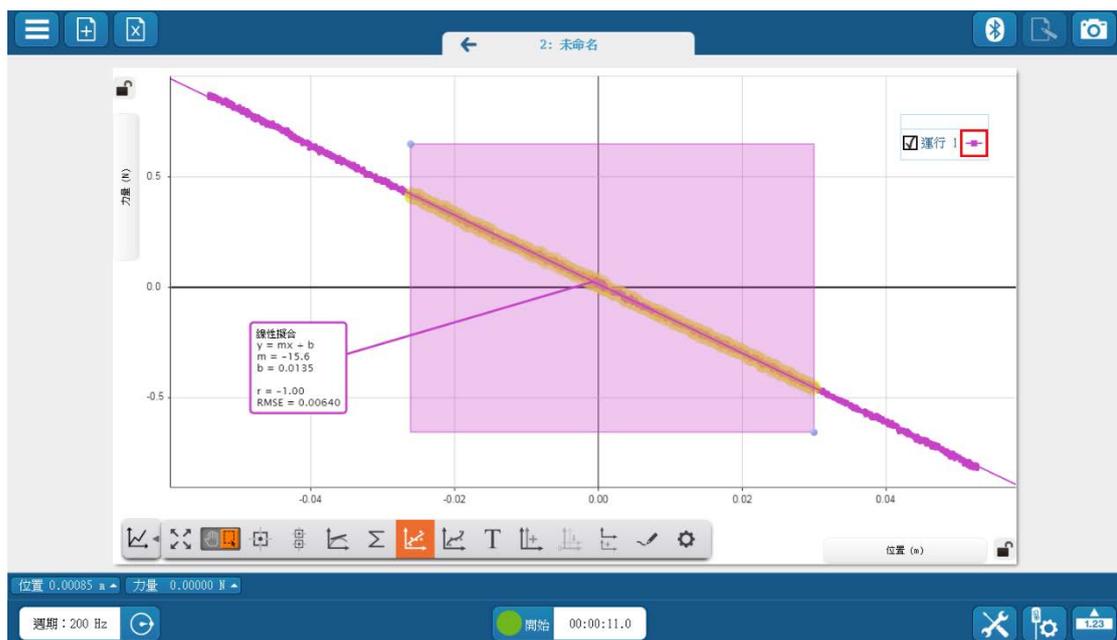
1. 測量滑車與彈簧質量(2 個)的質量。
2. 使軌道水平，固定好彈簧掛鉤(用橡皮筋輔助固定，以免鬆脫)。
3. 小心將智慧滑車放置於軌道上(注意：切勿摔落滑車，以免受損)。打開智慧滑車電源，於手機或電腦 SPARKvue 數據擷取程式裡的藍芽設定處找到滑車並連線。相關操作請參考網頁上“SPARKvue 數據擷取程式操作說明”或影片(注意：每輛滑車有不同編號，僅可選擇自己的滑車編號做連線，否

則會影響其他人連線該滑車。)



圖二、智慧型滑車。

4. 在數據擷取程式中設定同時顯示滑車位移及拉力變化圖，數據取樣率建議設 200 Hz (或 100 Hz)，拉力計(力量)的數值位數建議調整到 4 位(或 5 位)。
5. 選擇一彈簧勾住智慧滑車的拉力計鐵勾，另一端勾住軌道上的彈簧掛勾。緩慢拉動滑車，以程式紀錄滑車位移及彈簧拉力之變化。注意：彈簧拉長範圍應適當，不可使彈簧伸長範圍超過彈性極限，以免造成損壞。
6. 開啟新的圖表，橫軸選擇滑車位移(即彈簧伸長量) x ，縱軸選擇力量(彈簧拉力) F ，例如圖三。觀察彈簧在此伸長範圍(彈性極限)內是否遵守虎克定律(Hooke's Law)。
7. 用線性函數擬合 $F-x$ 關係圖，由斜率得到此彈簧的彈力常數 k_1 。

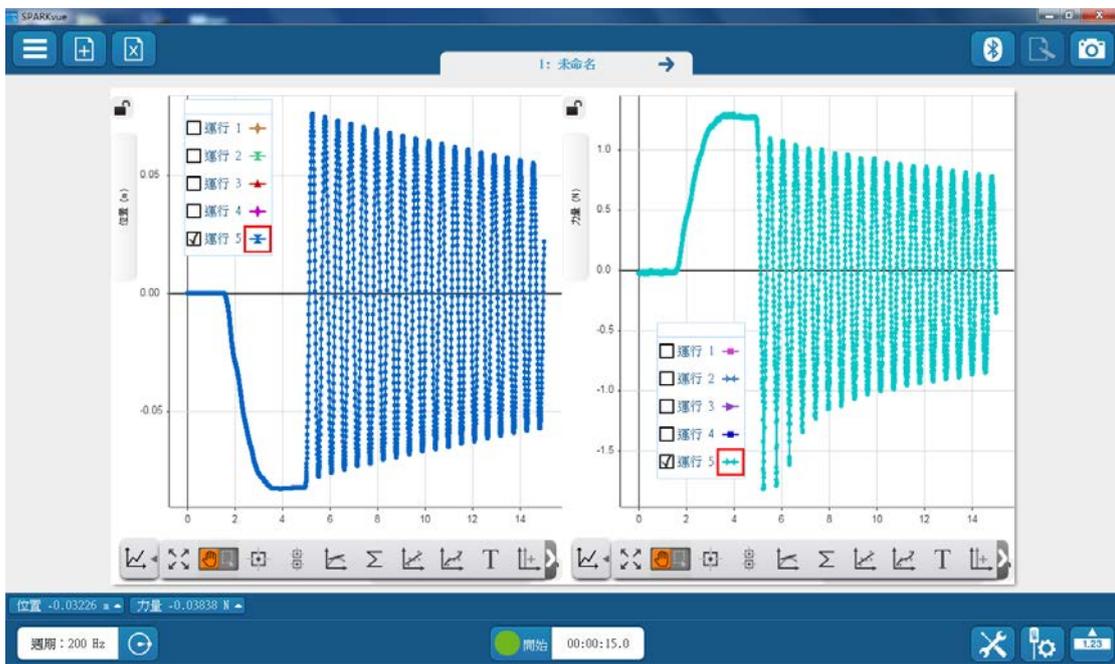


圖三、彈簧拉力與滑車位移(彈簧伸長量)之關係圖。

8. 改用另一彈簧重複步驟 5-7，得到另一彈簧的彈力常數 k_2 。

(二) 週期 T 與滑車質量 m 的關係

1. 將滑車兩端連上彈簧，兩個彈簧的另一端連接彈簧掛勾，並調整彈簧掛勾座的位置，使兩個彈簧適度拉長（如圖一所示）。
2. 滑車上先不加砝碼，輕推滑車使其來回振盪，測試振盪是否順暢。
3. 由程式紀錄滑車震盪時的位移變化與拉力（僅能看到拉力計那側的彈簧施力）變化，如圖四。從圖中分析求得震盪的週期 T （建議由多個週期的總時間長度，求得平均週期）。



圖四、觀察滑車位移(左圖)與彈簧拉力(右圖)隨時間之震盪變化。

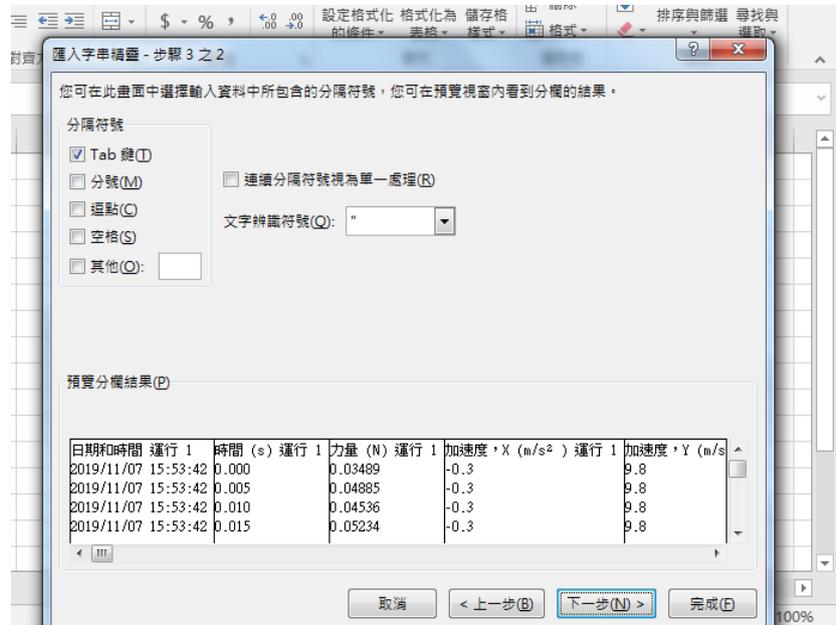
4. 在滑車上加砝碼，以黏土固定，以增加系統質量。輕推滑車使其來回振盪，測試振盪是否順暢，砝碼是否會滑動。注意：砝碼與黏土質量需先各別測量。
5. 重複步驟 3，測量震盪週期 T 。
6. 繼續增加系統質量，量測不同質量 m （建議 4 種以上）時的震盪週期 T 。
7. 將 T^2 與質量 m 作圖。由(5)式得其斜率及截距，推算出 k 值與 m_s 值。
8. 試比較此得到的 k 值，與前面量測得到的彈性係數 k_1 、 k_2 的關係為何。

(三) 驗證動能位能是否守恆

1. 取前面任一組數據，觀察同一段時間中位移隨時間的震盪變化 $x(t)$ ，以及同一段時間中速率隨時間的震盪變化 $v(t)$ 。
2. 將數據匯出成 txt 檔或 csv 檔，以記事本(notepad.exe)開啟，確認中文字形

沒有問題後再存檔一次。以 Excel 程式將檔案匯入，匯入時選擇適當分隔符號(例如 Tab 鍵)，如圖五，使各數據欄分開。

3. 在數據中找到位置變化 x 以及速率變化 v_x ，選取同一段時間的數據計算各時間點的動能、位能與兩能量的合，如(6)式。觀察動能與位能的合是否隨時間改變。



圖五、以 Excel 程式將檔案匯入時，選擇適當分隔符號(例如 Tab 鍵)。

4. 取另一組實驗數據，觀察動能與位能的合是否隨時間改變。
5. 以公式(6)式驗證系統的能量是否守恆。若所得能量不守恆，請討論可能的原因。(若有很大的誤差，應嘗試找出原因並設法排除)

五、問題 (自選)：

1. 當你分析彈簧常數 k 時， $F-x$ 關係曲線是否各處都有相同斜率？若斜率(k 值有差異)，應取哪個位移範圍計算 k 值做後續實驗分析？
2. 若軌道不水平，對實驗(二)中週期 T 的測量結果是否有影響？
3. 在你的實驗數據分析中，步驟(二)之 7 所得的 T^2 對滑車質量 m 的關係是否通過原點？若不通過原點，可否由其截距推得彈簧質量 m_s ？
4. 如果彈簧的質量 m_s 不可忽略的話，而且在運動中彈簧的伸長量若是均勻的，

試證明週期 T 應為：
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}}$$
。(可利用 $v_i = \frac{x}{l}v$ ，式中 x 為彈簧伸長量， l 為彈簧長度， v 為平衡點的速度)

5. 實驗時滑車的振盪振幅 A 會隨時間 t 慢慢變小。請約略畫出 A 隨 t 的變化圖。