

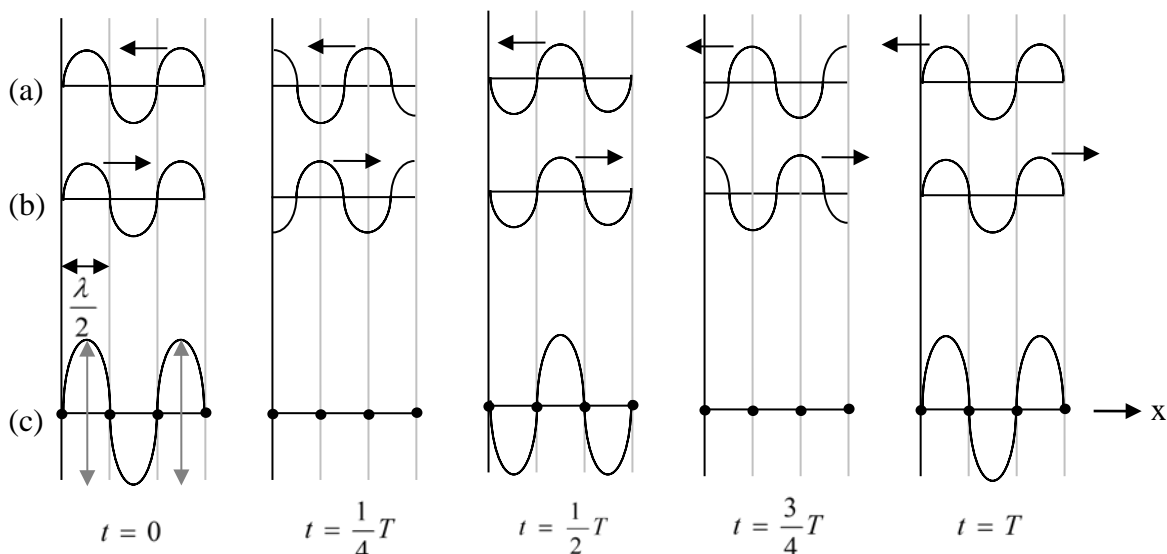
波動實驗

一、目的：

1. 由繩弦上產生駐波時的頻率與波長求得波速。
2. 比較波速與繩弦張力的關係，並推估弦的線密度。

二、原理：

(一) 駐波原理(standing wave)：



圖一、若繩上兩波頻率、波長及振幅相同，但傳播方向相反。(a)往左傳遞的波，(b)往右傳遞的波，(c)疊加後產生的駐波。

假設在一拉緊的細繩上送入兩個波，兩個波會疊加合成。圖一說明兩波重疊之疊加現象。圖一(a)與(b)分別表示一個向左及一個向右傳播的波，圖一(c)則表示兩波之合成的波形。在(c)圖中合成波最明顯的特徵是許多波節(node)的位置，以黑點表示之，而繩子在波節的位置上是保持不動的狀態；兩相鄰波節的中間，出現合成波的最大振幅則稱為波腹(antinode)。由於波節與波腹的(左右方向)位置固定不動，故稱為駐波。

假設兩個波的行進方程式為：

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) \quad (1)$$

及
$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t) \quad (2)$$

由疊加原理(1)及(2)式所得合成波為

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

利用三角函數 $\sin(A) + \sin(B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

可得合成波為
$$y'(x, t) = [2y_m \sin(kx)] \cos(\omega t) \quad (3)$$

(3)式為駐波方程式，在中括弧中的 $2y_m \sin(kx)$ 不為時間的函數，而是在位置 x 處之繩子振動的振幅。亦即在駐波中，其振幅會隨著位置不同而有所不同。由(3)式所描述振幅會隨著 $\sin(kx)$ 而改變。在波節的位置，其振幅恆等於0，即 $\sin(kx) = 0$ ，故得

$$kx = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

由於波數 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，可得

$$x = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

即波節的位置在於繩長為半波長時的整數倍，而相鄰兩波節之距離為半個波長。

在波腹的位置，其最大振幅為 $2y_m$ ，此時 $|\sin(kx)| = 1$ ，故得

$$kx = (n + \frac{1}{2})\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

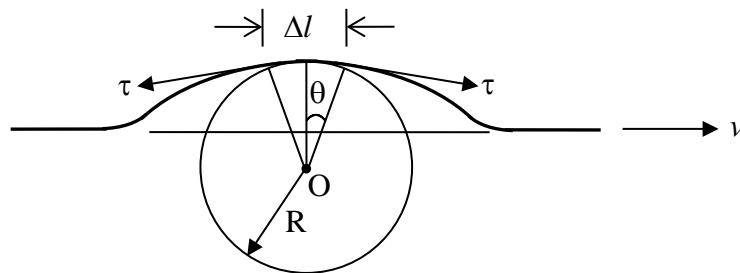
利用波數 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，可得

$$x = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

即波腹的位置恰在兩波節正中央的位置，而相鄰兩波腹之距離為半個波長。由圖一可知，波節與相鄰的波腹之間的時間相差了 $1/4$ 個波長。

(二) 在一拉緊細繩上所受之張力與波傳遞的速率之間的關係：

將一細繩上送入由左向右傳遞的一個左右對稱的脈波，如圖二所示。在參考座標系統 O 上，脈波為靜止不動的；但對於觀察者而言，細繩看起來是以一速度 v 由右向左移動。



圖二、繩波波速推導示意圖。

假設一拉緊的細繩，以線密度 $\mu = m/l$ 表示其單位長度的質量，其中 m 為細繩之總質量， l 為細繩之總長度。考慮脈波上之一小段長度 Δl ，其曲率半徑為 R ，其兩端均受張力 τ 作用，因水平分力相互抵消，而垂直分力因加成作用成為恢復力 F 使得 Δl 之線段作圓周運動。當 $\theta \ll 1$ 時， $\sin \theta \sim \theta$ ，且 $2\theta = \frac{\Delta l}{R}$ ，故其圓周運動之向心力 F_c 大小為

$$F_c = 2\tau \sin \theta \approx \tau(2\theta) = \tau \frac{\Delta l}{R} \quad (6)$$

根據牛頓運動第二運動定律 $F = ma$ ， m 為線段 Δl 之質量，故向心力 F_c 為

$$F_c = ma = \mu \cdot \Delta l \cdot \frac{v^2}{R} \quad (7)$$

由(6)及(7)式可得 $\mu \cdot \Delta l \cdot \frac{v^2}{R} = \tau \frac{\Delta l}{R}$ ，簡化後可得圓周運動之速率，即為脈波傳遞之速率 v ：

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (8)$$

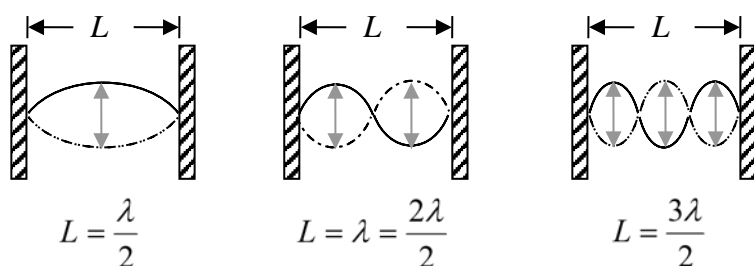
(三) 在一拉緊細繩上所受之張力與其振動頻率之間的關係：

在某些頻率下，向左的波和向右的波會相互干涉而產生一駐波的現象，我們稱此現象為共振(resonance)。若振動頻率為 f ，其對應的波長為 λ ，則波在繩上的速率為

$$v = f\lambda \quad (9)$$

因為繩子兩端都是固定的，因此兩端點皆為波節，由圖三可得知其 λ 與 L 的關係：

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (10)$$



圖三、駐波條件示意圖。

利用(8)、(9)及(10)式，可得相對於這些波長之共振頻率 f 為：

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

三、儀器：

細繩、振動器、訊號產生器、精密天平、滑輪、砝碼、砝碼吊盤。

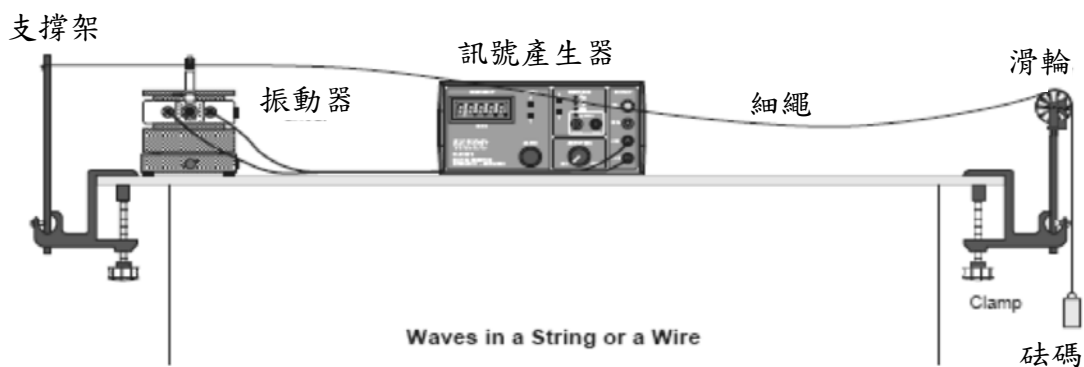
注意事項：

1. 振動器使用前將驅動臂鎖定桿(Driver arm lock/unlock tab)裝置設定到“Unlock”處，若未切換到此狀態，則當啟動振動器時，會產生非常吵雜的噪音。
2. 不論是要連接配件到驅動臂上或擬從驅動臂上拆除配件時，請務必將振動

器上的驅動臂鎖定桿(Driver arm lock/unlock tab)裝置設定到鎖定“Lock”狀態，使驅動臂上的連接插座與傳動軸被隔離，以保護傳動軸。

四、步驟：

1. 剪一段細繩(建議約 2 米左右)，量測其長度。以精密電子秤量測其質量，求得細繩之線密度 μ 。
2. 架設弦震動實驗系統，如圖四所示。振動器的鎖定桿設定到鎖定“Lock”狀態。將細繩先在支撐架上固定好，再穿過振動器上的孔。(注意：勿先將細繩鎖在振動器上，避免振動器受到過大的側向拉力而受損。)
3. 細繩跨過滑輪，並懸掛適當砝碼(例如 300 g)以施加張力 τ 於細繩上。將細繩鎖在振動器上。(注意：調整細繩張力前，應先鬆開振動器上的細繩，避免振動器受到過大的側向拉力而受損。)
4. 將振動器上的鎖桿撥至“Unlock”，調整訊號產生器使振動器有適當振幅。調整振動頻率，使細繩產生三段駐波。微調頻率，使駐波振幅最大。記錄此時的頻率 f 。量測此時駐波波節間之距離，求得波長 λ 。
5. 重複步驟 4，找出四段、五段或六段的波長 λ 與頻率 f 。(共三組以上不同駐波數。)
6. 利用以上數據及 $v = f\lambda$ ，計算波速 v 。
7. 改變張力 τ (砝碼質量變化應適當選取，例如每次變化 50 g)，重覆步驟 3~6。得到 3 種以上不同張力的結果。
8. 以 v^2 對張力 τ 作圖，驗證公式(8)，並由關係圖斜率倒數求出線密度 μ 。與步驟 1 量得之線密度值相比較。



圖四、弦震動駐波實驗裝置示意圖。

五、問題(自選)：

1. 步驟 1 量測細繩之線密度 μ 時，需要剪一段線將其拉長再量測其長度。剪線的長度多長比較是當？拉伸線時是否應該施加外力？
2. 改變張力 τ 的條件時，砝碼質量變化量應適當選取。若變化過多或太少，可能對實驗有何影響？