慣性矩、角速度與角加速度

一、目的：

測量飛輪受力矩產生的角加速度，探討各轉動相關物理量間的關係。

二、原理：

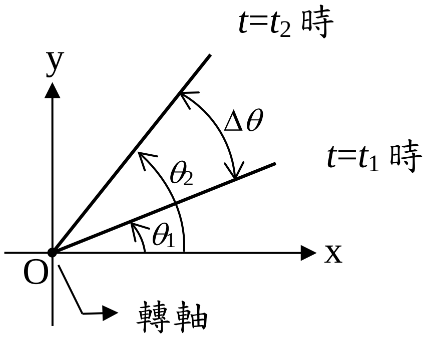
(一) 剛體轉動物理

一剛體可視為許多質點的集合體，對沒有彈性的剛體而言，各質點間的相對距離不變。當剛體對固定的轉軸 O 轉動時，若此物體上某一特定點至轉軸 O 的連線與 x 軸夾角θ隨時間 t 變化，如圖一示意圖，則物體在時間 t_1 與 t_2 間的平均角速度(average angular velocity)可寫成：

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

上式中，在時間 $t=t_1$ 時角位置為$\theta=\theta_1$；在時間 t_2 時角位置為$\theta=\theta_2$，$\Delta\theta$表示對應時間間隔Δt 的角位移量。我們常用的(瞬時)角速度ω 是取趨近於零的時間間隔所得，即

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{1}$$



圖一、物體對轉軸 O 作轉動。轉軸方向垂直紙面。

雖然 ω 被稱為角“速度”，但它不同於速度($\vec{v} = d\vec{r}/dt$)，請勿混淆。若物體的角速度隨時間而改變，則該物體具有角加速度。令ω_2 和ω_1 分別為時間 t_2 和 t_1 的角速度，則平均角加速度(average angular acceleration)定義為

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

上式中，$\Delta\omega$ 為對應時間間隔Δt 的角速度變化量。我們常用的(瞬時)角加速度α是取趨近於零的時間間隔所得，即

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{2}$$

(1)式和(2)式定義了角速度與角加速度。根據量綱分析(dimensional analysis)，角速度ω的單位為弧度/秒 (rad/s)；角加速度α的單位為弧度/秒^2 (rad/s^2)。

轉動時，各質點可能具有不同的速率。質點的移動速率為$v=\omega r$，r 為此質點到轉軸間的距離。對於質量為 m 的質點，其動能$K=\frac{1}{2}mv^2$。而整個剛體的動能為所有質點的動能加總：

$$K=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1{}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2{}^2+\frac{1}{2}m_3\upsilon_3{}^2+\cdots=\sum_i\frac{1}{2}m_i\upsilon_i{}^2 \tag{3}$$

其中，m_i、v_i 分別為第 i 個質點的質量以及速率；求和符號$\sum_i$ 表示對組成該物體的所有質點(i=1,2,3…)進行加法運算。因所有質點均有相同的角速度ω，故可以 $v_i=\omega r_i$ 代入(3)式中得

$$K=\sum\left(\frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2\right)=\frac{1}{2}(\sum m_i r_i{}^2)\omega^2 \tag{4}$$

其中，r_i 為具質量 m_i 之質點 i 至轉軸的垂直距離。在(4)式中，我們稱$\sum m_i r_i{}^2$ 為剛體對該轉軸的轉動慣量(moment of inertia) I：

$$I=\sum_i m_i r_i{}^2 \tag{5}$$

由(5)式可知，轉動慣量 I 的 SI 制單位為 kg·m^2。

若上述剛體為質點系統組成之連續體，則轉動慣量表示成

$$I=\int r^2\,dm=\int \rho r^2\,dV \tag{6}$$

其中ρ表示體積 dV 處的質量密度。

當此物體繞固定軸轉動時，依據牛頓第二運動定律，作用於質量 m 之質點的力矩τ (torque)的大小可用下式表示：

$$\tau=\left|\vec{r}\times\vec{F}\right|=F_t r=m(\alpha r)r=(mr^2)\alpha=I\alpha \tag{7}$$

由(7)式可見，角加速度α與物體所受力矩τ成正比，而與物體之對應轉軸的轉動慣量 I 成反比。

於本實驗中，我們將使用兩個轉動物體：

1. 質量為 M，半徑為 R 的實心均勻圓盤，其對應垂直盤面之對稱軸的轉動慣量為 $I=\frac{1}{2}MR^2$。 (8)
2. 質量為 M，內外半徑分別為 R_1 和 R_2 的環形圓柱，其對應中心軸的轉動慣量為 $I=\frac{1}{2}M\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)$。 (9)

剛體的總動能為平移動能與轉動動能之和，即

$K=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$，其中 v 為質心之平移速度，ω為剛體轉動之角速度。本

實驗中，剛體不做平移的運動，故剛體的動能只有轉動動能$\frac{1}{2}I\omega^2$這個部分。

(二) 實驗理論分析

實驗時繩子一端繫上質量為 m 的重物，繩子另一端纏繞於飛輪線盤之周緣，如圖二。假設繩子的張力為T，重物之向下加速度為a，則

$$mg - T = ma \quad \text{或} \quad T = mg - ma \tag{10}$$

設繩子與線盤間沒有滑動，飛輪小盤的半徑為r，則

$$a = \alpha \cdot r$$

代入(10)式可得

$$T = mg - m\alpha r \tag{11}$$

由於張力T的方向與線盤之盤緣相切,且由軸心至切點的半徑向量與張力T垂直，故力矩

$$\tau = Tr = (mg - m\alpha r)r = I\alpha \tag{12}$$

若將摩擦力f也考慮進去，則角加速度α應滿足

$$\tau = (mg - m\alpha r - f)r = I\alpha \tag{13}$$

本實驗分成兩大部份：第一部份是檢驗剛體繞固定軸轉動時，力矩τ與角加速度α的關係，如(12)式所述；第二部分是驗證系統能量(移動動能+轉動動能+位能)守恆。

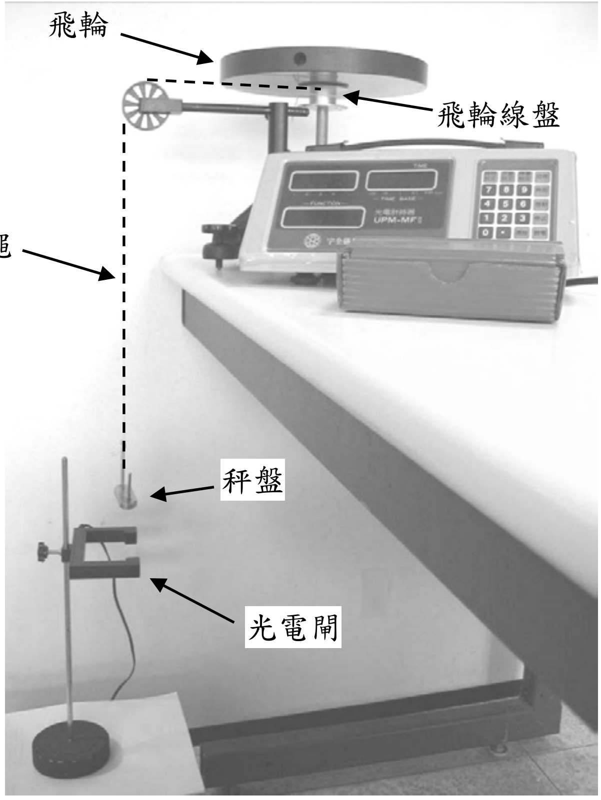
三、儀器：

飛輪組(飛輪轉盤質量 $M_{盤}$=1.5 kg；圓環質量 $M_{環}$=1.42 kg)、轉動軸承組、滑輪、砝碼組、光電計時器、光電閘、游標尺、捲尺、細繩。

四、步驟：

(一) 不同力矩作用下的角加速度：

1. 實驗裝置如圖二所示。剪一條長度略大於飛輪至地面高度的細繩，繩的一端繫上秤盤與砝碼(先以較小的重量做實驗)，另一端纏繞於飛輪線盤的周緣上(注意：細繩剛纏繞時可拉緊並自相交疊，以免重物未達光電閘前即先鬆脫)。



圖二、實驗裝置圖。

2. 將光電閘放置於秤盤降落之路徑上。
3. 將光電計時器電源打開，選擇功能 4(請參閱附錄說明)。將砝碼系統從靜止狀態釋放，測量其下降一段固定距離(至光電閘的位置)所需時間 t；重新纏繞細繩，重複上述測量三次以上。
4. 根據懸掛的砝碼系統所經距離 s 和下降所需時間 t，計算其線加速度 a (註: $s=\frac{1}{2}at^2$)。再利用$a=r\alpha$，求得飛輪轉盤的角加速度α。其中 r 為繩子所繞的線盤半徑。
5. 改變砝碼質量，重複步驟 1-4 的測量，利用公式(12)計算出轉動慣量 I。與公式(8)求得的轉動慣量 I 理論值比較。
6. (自選) 在上述飛輪轉盤上疊加另一個圓環以改變轉動慣量I,重複步驟1~5。
7. (自選) 比較實驗所得的飛輪轉盤與圓環的轉動慣量，以及利用公式(8)、(9)所得的飛輪轉盤與圓環的轉動慣量。

(二) 角速度及角加速度隨時間之變化：

在砝碼系統落地的過程中，轉盤作等角加速度運動，亦即$\omega=\omega_0+\alpha t$。從$\omega-t$關係圖的斜率可得角加速度α為正值(假設大小為α_1)。而當砝碼著地(或細繩鬆脫)時飛輪轉盤因摩擦力 f 而做負角加速度運動,所得的斜率α為負值(假

設大小為α_2)。可得摩擦力矩$\tau_f = fr = I\alpha_2$。公式(13)可寫成

$$\tau = (mg - mar)r - fr = I\alpha \quad \text{或} \quad (mg - mar)r = I\alpha_1 + I\alpha_2$$

因此 $I = (mg - mar)r/(\alpha_1 + \alpha_2)$ (14)

圖三、轉動實驗裝置圖。

1. 如圖三，先在飛輪轉盤上貼可遮蔽光電閘的輕木棒。
2. 將光電計時器電源打開，選擇功能 5，次數設定 50。
3. 利用步驟(一)中的方法，以砝碼施力讓轉盤旋轉。當砝碼開始落下時，即啟動光電計時器開始計時，光電計時器同時記錄光源被遮蔽的次數。
4. 按下光電計時器之時距：1，接著每按一次時距，計時器螢幕則顯示每轉完一圈(光源被遮蔽)所需的時間Δt(即開始至完成第零轉、第一轉、第二轉、…所經之時間)。計算各時段之平均角速度 $\omega = 2\pi/\Delta t$，將角速度ω對累計時間 t 作圖，由$\omega - t$圖的斜率$d\omega/dt$即可得角加速度。
5. 實驗可得到在砝碼落地前的等角加速度過程中，$\omega - t$關係是$\omega = \omega_0 + \alpha t$。從$\omega - t$關係圖的斜率可得角加速度$\alpha$為正值(假設大小為$\alpha_1$)。而當砝碼落地後因摩擦力使$\omega - t$關係斜率變負值(假設大小為$\alpha_2$)。此外，可由兩條直線之交點求得砝碼脫離瞬間的角速度 ω_{max}。
6. 若不考慮摩擦力，從上述步驟得到的加速度α_1以及公式(12)，計算出飛輪轉盤的轉動慣量I。與轉動慣量I的理論值比較。
7. 考慮摩擦力，從減速時的負角加速度(大小為α_2)與公式(14)計算出飛輪轉盤的轉動慣量I。與轉動慣量I的理論值比較。

8. (自選) 總角位移θ可以從飛輪線盤半徑r以及砝碼掉落高度h算出($h = r\theta$)。利用$\omega_{max}{}^2 = 2\alpha\theta$也可得到一角加速度$\alpha$。由此加速度$\alpha$以及公式(12)，計算出飛輪轉盤的轉動慣量$I$，並與前面結果比較。

(三) 能量守恆：

假設因摩擦力所損失的能量可以忽略，則依據能量守恆定律可得

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

其中，h為質量m的下降高度。將實驗(一)或(二)得到的ω 和υ (υ=ω r)代入上式，比較上式中之位能變化(等式左邊)與動能變化(等式右邊)是否滿足能量守恆。

若考慮摩擦力f對系統做負功，做功大小為$fh = fr\theta = \tau_f\theta$。其中，$\theta$為轉動角位移，$r$為線盤半徑，摩擦力矩$\tau_f = fr = I\alpha_2$可從實驗二推算。則等式變成

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \tau_f\theta$$

其中，轉動慣量I可從實驗二用公式(14)求得。試比較等式左右邊，看是否滿足能量守恆。

五、問題(自選)：

1. 實驗(一)中，如果砝碼在碰到光電閘前，細繩已產生滑動(或滑落)，對實驗結果會產生何種影響？
2. 你在實驗(三)所得的結果中，位能減少的量比動能增加的量大還是小？兩數值不同的原因為何？若是因為摩擦力造成能量損耗，請估計此摩擦力的大小。
3. 實驗(一)與實驗(二)均可得到角加速度，你認為何者比較準確？理由為何？請討論此兩種方式的優缺點。

Revised 2019.12.10