實驗一　基本量測與數據分析處理

第一部分　原理說明

一、目的：

學習基本的量測與數據分析處理方法。

二、原理：

做實驗時選對度量工具及方法固然重要，數據的處理更是不可或缺的一環。本實驗除了教導學生使用螺旋測微器與游標尺之外，更介紹數據分析的方法，包括記錄數據的方式、有效數字的選取、實驗誤差的產生及誤差如何於算式中傳遞，使同學們建立“誤差”及“精確度”的概念。

(一) 記錄數據的方式：

要完整地表示實驗所測量之**物理量，<u>數值</u>和<u>單位</u>缺一不可**，如 2.998×10^{8} m/s。數值(2.998×10^{8})與單位(m/s)間應留一小空格。在科學研究中，我們常將數值寫為科學記號形式，如 $(a.bc\pm0.0d)\times10^{n}$ (其有效數字見下方說明)。儀器的精確度也應記錄。常見的做法是將實驗數據用表格方式記錄(表格應自己依預設的實驗計畫來設計)，將儀器精確度及相關實驗細節註記在表格上方或下方。

(二) 有效數字的選取：

實驗所量得的**物理量都包含有限個數的有效數字**，其與量測精確度有直接的關聯。其中，精確值為直接從量測儀器上讀得的精確數字，估計值則為不準確的估計數字。例如：12.68，其中 12.6 為精準值，8 為估計值。

一般的十進位單位換算不影響有效位數。例如，用科學記號表示 12.68 cm 可寫成 1.268×10^{1} cm 、1.268×10^{-4} km、1.268×10^{-1} m、1.268×10^{2} mm 等。

下列情形需注意：

(1) 結尾為零的整數，若零有做記號，則有效位數須算到有做記號的零，之後的零不算。如數值 206<u>0</u>00 的有效位數為(前)4 位，第 4 位已經是估計值。若以科學記號可寫成 2.060×10^{5}，此時不需加註記號就可清楚表達出有效位數有 4 位。

(2) 結尾為零的整數，無任何記號，則結尾的零都不算。如 206000 有效位數為 3 位，科學記號寫成 2.06×10^{5}。

(3) 小於 1 之值，左邊的零都不算，數值右邊的零要算。如 0.000800 有效位數為 3 位，科學記號寫成 8.00×10^{-4}。

這些規則亦可參考 http://en.wikipedia.org/wiki/Significant_figures。

關於有效數字的四則運算，將用下例幫助各位了解：

1. 加法之運算：

範例：

$$\begin{array}{rr} & 21.38\underline{6} \\ + & 406.2\underline{3} \\ \hline & 427.6\underline{16} \end{array}$$

，則其有效數字應寫成 427.62

在加法的運算中，在任何一行中有個不確定值，則經運算後此行之結果亦為不確定值。

2. 減法之運算：

範例：

$$\begin{array}{rr} & 3106.42\underline{6} \\ - & 406.2\underline{3} \\ \hline & 2700.1\underline{96} \end{array}$$

，則其有效數字應寫成 2700.20

在減法的運算中，在任何一行中有個不確定值，則經運算後此行之結果亦為不確定值。

3. 乘法之運算：

範例 1：

$$\begin{array}{rr} & 1.4\underline{6} \\ \times & 6.2\underline{3} \\ \hline & \underline{438} \\ & 29\underline{2} \\ & 87\underline{6} \\ \hline & 9.0\underline{958} \end{array}$$

，則其有效數字應寫成 9.10

範例 2：

$48268\underline{7}\times 0.6\underline{8}=3\underline{28227.16}\Rightarrow 3\underline{30000}\Rightarrow 3.3\times 10^{5}$，有效位數為 2 位。

在乘法的運算中，其有效數字為乘數**或**被乘數中有效位數最少者。

4. 除法之運算：

範例 1：

$$\begin{array}{r} 1\underline{8.46} \\ 5\underline{3}\,\overline{)\,978.4\underline{9}} \\ 5\underline{3} \\ \hline 4\underline{48} \\ 4\underline{24} \\ \hline \underline{244} \\ \underline{212} \\ \hline \underline{329} \\ \underline{318} \\ \hline \underline{11} \end{array}$$

，則其有效數字應寫成 18

在除法的運算中，其有效位數以除數**與**被除數中有效位數最少者。

範例 2：

$$3\overline{)4.6853}\quad 1.5176$$

請注意：當除數為一肯定數值時，即不列入觀察，則商的有效位數應與被除數相同。

(三) 實驗誤差及改善方式：

用儀器量測物理量時，無論儀器的製作是多麼精良，在量度實驗上做得多麼小心，仍舊無法得到“絕對準確”的數據。在測量的可信度上通常只能得到一個範圍，而在數據的取捨之間必定會產生數據的誤差。因此我們必須了解測量數據的精確度，以及探討將誤差降到最低的方法。

1. 系統誤差(systematic error)及改善原則：

系統誤差是由一些固有的因素產生的，例如測量方法的缺陷、儀器校正不理想及個人操作習慣等等。原則上這些系統誤差可以通過一定的手段來降低。首先必須找出各種誤差來源，若是量測工具本身之問題，則需設法<u>改良儀器</u>；若是環境造成之問題，則需設法<u>控制實驗環境</u>；若是人為因素，則需<u>加強人員訓練</u>。唯有不斷思索改善，降低系統誤差，才能使科學研究成果不斷突破創新。**我們應在實驗過程中努力思考如何降低系統誤差，才能在實驗能力上不斷進步。**

2. 統計誤差(statistical error)及分析：

統計誤差也稱為隨機誤差(random error)。顧名思義，它是隨機產生，不可預計，也不可消除的。它使實驗的量測結果以統計學上所謂的「常態分佈」或稱「高斯分布」在理論值(真值)附近隨機出現。在此意義上，測量對象的真值是不可知的，只能通過多次測量以獲得一平均值盡量逼近真值。而平均值與真值之間的差異範圍(即平均標準差)究竟多少，則可由數學方法計算而得。

假設在測量某物理量 n 次時，所得到的數據為 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$。其算數平均值、標準差及平均標準差的計算公式如下：

(1) 算數平均值(Mean)：

$$\overline{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(2) 標準差(Standard Deviation)：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

(3) 平均標準差(Standard Deviation of the Mean)：

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n\,(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

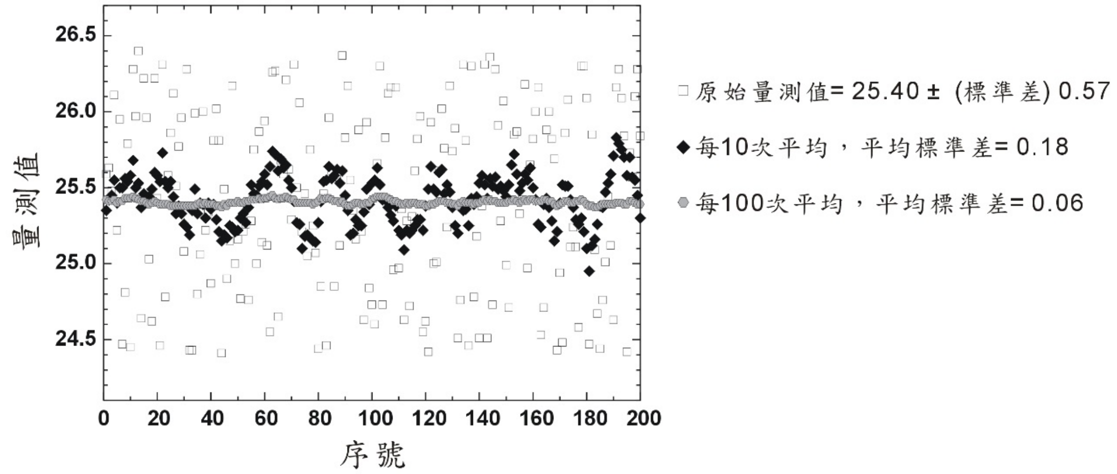
此一物理量(X)的量測結果可表示為

$$x = \bar{x} \pm \bar{\sigma} \quad 或 \quad x = \bar{x} \pm e\% \quad (其中\ e\% = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{x}} \times 100\%，稱為$$

百分誤差)

上述「平均標準差$\bar{\sigma}$ 」及「標準差σ 」皆可表示數據散佈的程度，但意義上不太一樣，使用時機也不相同。例如，若我們問的是教室中某一時刻某一點的溫度(假設其具有真值 25.351 ºC)，而電子溫度計量得的溫度值隨機跳動，經由多次量測後，可得到一平均值$\bar{T}$ ，其「**隨機的統計誤差**」可由「**平均標準差**」$\bar{\sigma}_T$ 來計算。$\bar{\sigma}_T$ 會隨量測次數增加而降低，表示測量的次數 n 越大則此點的溫度量測結果越準確。若$\bar{T}$ =25.350，$\bar{\sigma}_T$ =0.004，則溫度量測結果可表示為 T=25.350±0.004 ºC。此結果也意味真值極可能落在 25.346~25.354 之間。另一方面，若我們描述的是某一刻整個教室的室溫「分佈」，則本質上與上述的隨機誤差是不同的。因為不同位置有不同的溫度值，而此分佈並不會因為量測次數越多就變得越窄，此時表達「**分佈」應使用「標準差**」σ_T 來計算。若所得的平均值與標準差分別為$\bar{T}$ =25.35 與σ_T =1.20，其結果可表示為 T= 25.35±1.20 ºC。其形式上雖然也是$x = \bar{x} \pm \sigma$，但其中±1.20 ºC 是表達教室不同位置的溫度差異「分佈」範圍，而非量測上的「誤差」。即使溫度計的量測誤差或精度因實驗方法及量測次數變小，也無法使教室溫度的「分佈」範圍因而縮小。

為使同學能更直接的看見增加量測次數的效果，我們用圖一說明之。假設有一帶有「隨機」雜訊的數據(Noisy data)，如圖一所示，其量測值為 25.4 加上一介於 +1 與 -1 之間的隨機數值。由圖一可知，原始數據跳動的標準差約 0.57，因此難以判斷真值是在 25.4 的位置。但如果取 10 個數據點平均，其平均值已可較接近真值 25.4，但與真值之間仍有約 0.19 的跳動幅度(每 10 點數值的平均標準差)。如果取 100 個數據點平均，則 100 次平均值的跳動幅度只剩約 0.06 (每 100 點數值的平均標準差)，其平均值都更接近真值 25.4。由此例可知當平均次數增加時，其隨機誤差的影響會相對降低，得到的平均值會更接近真值。



圖一、數據平均的的效果。

上例中，量測 10 次約可使平均標準差降低 3 倍。此一特徵亦可由比較平均標準差及標準差的公式發現。「標準差」並不會隨量測次數 n 而減小，但**「平均標準差」會隨量測次數 n 的增加而減小 $\sqrt{n}$ 倍**。亦即，要讓隨機誤差減小 10 倍需要量測 100 次數據，以此類推。

對剛上實驗課的同學，最常問老師**數據量測「該做幾次」**再求平均。此一問題其實**應依實際狀況及需要而定**。**一般習慣是做 5 次以上。**當然，量測次數越多則統計誤差越小。但是，量測越多次代表量測所花的總時間越多，而當量測時間超出合適的範圍時，則可能無法如期完成實驗，或可能引入其他誤差或問題。例如，假設此時教室的室溫為 25.35 ºC，但若要使量測精度小到 0.01 ºC 需要花費 3 分鐘的量測時間，量測過程中室溫可能已經飄移到 25.38 ºC 了。此例中要求精度小到 0.01 ºC 卻無法使當下的室溫值誤差小於 0.01 ºC。因此實驗的測量也要考量測量對象的變動本質與測量方法或儀器能力的限制，否則可能使高精度的測量要求失去意義。

(四) 誤差的傳遞：

物理量分為基本量與導出量。導出量的平均標準差必須由直接測量之各基本量的平均值及平均標準差藉由物理關係式之運算而得出。例如，動量(導出量)是由質量(基本量)與速度(導出量)相乘而得，而速度(導出量)又是由位移(基本量)除以時間(基本量)算得。當多次測量質量、位移及時間後，產生個別平均值及平均標準差時，將影響最後所得之結果。(誤差傳遞的四則運算說明如附錄)

(五) 線性迴歸分析：

使用最小平方計算方法是常用的分析方法，可分析資料組的相關性。在線性迴歸分析中，會出現另一個統計值 R^2 稱為判定係數，此判定係數是用以判斷由迴歸分析所得的線性方程式是否足以解釋 x 和 y 間的關係，其數值為 0 ~ 1；如果當 $R^2=1$ 時，則為完全相關，即表示實驗值 y 值和方程式所得之 y 值沒有差異；當 $R^2=0$ 時，則迴歸方程式對於根據 x 值推測 y 值是沒有幫助的。(詳細說明請參考附錄)

第二部份　操作練習

學習游標尺與螺旋測微器的使用方法，練習數據處理與分析。

注意：為使同學練習「平均標準差」的計算及誤差傳遞，本實驗中我們假設量測所得的物理量(如鋼珠直徑或物體重量) 的變化僅為「隨機」誤差，而非物理量本身的「分佈」，此時增加量測次數便能降低統計誤差。實際上，個別測量結果的差異(誤差分佈)同時來自隨機誤差及物理量分佈(例如鋼珠並非正圓球形)。

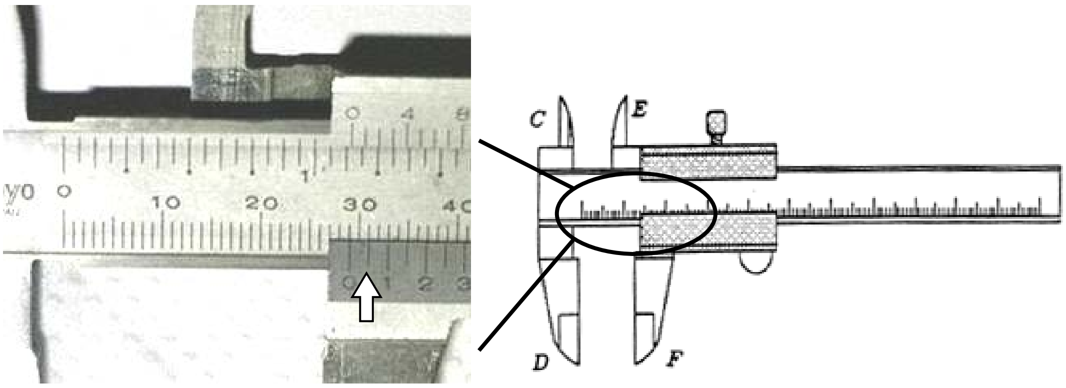
一、游標尺 (Vernier Caliper)：

先將游標尺的主尺與副尺閉合，此時主尺與副尺的零點應對齊(若沒對齊則應該將此差值修正回之後的測量值)。一般的游標尺，副尺刻度 10 恰好落在主尺的 39 mm 處。也就是說，副尺 1.0 刻度(即一大格)為 3.9 mm，與主尺 4 mm 相差了 0.1 mm。故副尺 0.5 刻度(即一小格)與主尺 2 mm 相差了 0.05 mm，此即是精確度為 1/20 mm 的由來。測量的原理就是藉著這長度差來判斷讀出更精準的測量。部分同學在國中或高中時已經學過游標尺原理，並曾練習過相關的計算。但是作為一個常用的工具，游標尺的設計在使用上即可直接判讀其數值。學生應學習如何**直接讀取刻度值**，而不要使用公式計算求值。以下舉例說明如何直接讀值。

如圖二所示，游標副尺的「0 刻度」介於 29 與 30 mm 之間，因而可直接判斷物體長度是 29「點多」。至於多多少則應直接觀察副尺上哪個刻度與主尺上的某刻度相對齊(或最靠近)。此例中副尺 0.5 刻度與主尺上的刻度對齊，故此物體的外徑為 29.05。若副尺 1.0 刻度與主尺上的刻度對齊，則此物體的外徑為 29.10，依此類推。

注意事項：

1. 應學習由副尺位置「**直接讀出數值**」。雖亦可使用以前中學教過的原理與計算，但較費時且又容易算錯。
2. 一般測量長度使用圖二中的 DF 兩端(有平面與鋒利兩處可選用)，而 CE 兩端可用來量測圓柱內徑或兩物間距。
3. 若測量時施力過大，可能導致物體局部變形或損壞游標尺。故切記，勿施力過大。
4. 副尺上有一固定螺絲，可將副尺鎖住，有時可方便讀取數值。但滑動副尺前務必先將它鬆開。
5. 建議多選擇不同部位重複量測。



圖二、游標尺示範圖。左圖中副尺的第 0.5 刻度與主尺某一刻度對齊。

二、螺旋測微器 (Micrometer)：

圖三所示為一螺旋測微器。使用時將待測物體置於固定趾 A、B 之間並輕轉套筒 T 使物體與固定趾 A、B **即將接觸**。**切勿直接轉套筒**

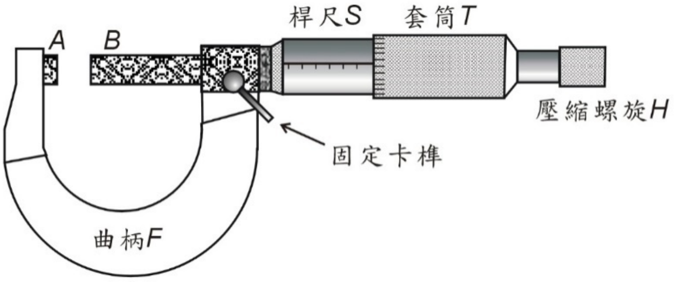
***T* 使固定趾 *A*、*B* 用力夾住物體**，如此易造成螺旋測微器螺牙損壞或物體變形。為使物體與固定趾 *A*、*B* 之間的施力恰當，可讓物體與固定趾 *A*、*B* 輕輕接觸後，再用手指慢慢輕轉尾端的壓縮螺旋 *H*，使其發出數聲“滴答”聲。“滴答”聲次數應固定，以使施力儘可能每次都相同。

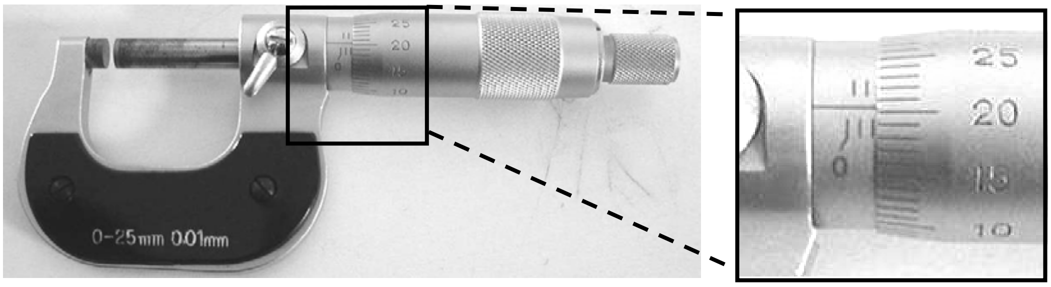
固定好物體之後，可由桿尺 *S* 及套筒 *T* 上之刻線位置得知物體長度。桿尺每一上、下刻度間距為 0.5 mm (下刻度彼此間距為 1 mm)。而可旋轉的套筒上共分 50 刻度，每轉一圈可使套筒 *T* 相對於桿尺 *S* 移動 0.5 mm。故套筒上每刻度對應於位移量 0.5 mm/50 = 1/100 mm (=0.01 mm)，此為讀值的精確值位數。由於套筒上的每一刻度在讀值時可以估計到 0.1 刻度，因此**螺旋測微器讀值的估計值位數，亦即有效位數，可以到 0.001 mm** (=1 μm)。由於此一螺旋機械結構可用於線性推動物體，並具有相當不錯的移動精度及位移量測精度，因此類似的結構相當廣泛應用於光學精密移動平台。

圖三下方舉一例說明如何讀值。套筒邊緣位在桿尺 2.0 與 2.5 mm 的刻度之間，表示物體長度由 2.0 mm 往上加。而加多少則由套筒上的刻度位置來看。圖中桿尺橫刻線指到套筒上的 20.4 刻度，因此此物體的長度為 2.0 + 0.204 = 2.204 mm。

<u>注意事項</u>：

1. 當欲夾緊物體或是固定趾 *A*、*B* 兩端**即將**接觸時，不可轉動套筒 *T*。應轉動壓縮螺旋 *H* 處，直至聽到“滴答”數聲時，即停止再轉動，不可強行硬轉。
2. 轉動壓縮螺旋 *H* 處，使固定趾 *A*、*B* 兩端接觸時，讀測微器上的讀數，其稱為零點讀數。若零點讀數無法恰好為 0 時，即表示有零點誤差。量測完後，其測量之數值需做零點誤差修正(實際厚度=測量之讀值-零點誤差值)，以達準確之量測值。
3. 曲柄上有一固定卡榫，可將固定趾 *B* 鎖住，方便讀取數值。但轉動套筒前務必先將它鬆開，以免損壞精密螺牙。
4. **應學習由套筒位置「直接讀出數值」**。雖亦可使用以前中學教過的原理與計算，但較費時且又容易算錯。





圖三、螺旋測微器各部名稱及示範圖。

三、實驗步驟：

請依照指定方法(游標尺、測微器或電子天平)量測待測物的尺寸及質量，並計算出物體體積與密度。

各量測物理量應算出誤差，各計算所得之物理量(如體積、密度)應利用誤差傳遞求得誤差。

學生應學習使用電腦軟體 (如 Excel) 輔助整理及計算各項數據。

完成各項指定數據量測及計算後，整理成表，提交給老師或助教簽名認證。記錄表可參考以下範例。

實驗記錄表格範例

此實驗記錄表格範例僅供初學者參考。
學生應學習自己思考、規劃實驗所需的數據，並嘗試製作記錄表格。

(表一) 空心圓柱 尺寸量測

	外直徑 A (mm) 游標尺	內直徑 B (mm) 游標尺	高度 H (mm) 游標尺	質量 m (g) 電子秤
1				
2				
3				
4				
5				
平均				
平均標準差				

由 A、B 與 H 的平均值計算所得的體積 V 的平均值 $\overline{V}$=___________

體積 V 的誤差值 σ_V=_______________

由 V 與 m 的平均值計算所得的密度 D 的平均值 $\overline{D}$=_____________

密度 D 的誤差值 σ_D=_______________

四、問題(自選)：

1. 量測金屬圓柱體的高度和直徑時，應該在同一位置重覆量測多次？還是在不同位置或是不同方向都要量測？試說明。
2. 你覺得若要得到金屬圓柱體的體積 V 的平均值時，應分別取各次量得的高度和直徑，算出各次的體積值再求其平均值？還是先求得高度和直徑的平均值，再依此算出體積平均值？試說明之。
3. 游標尺若想要精確度達到 1/100 mm，則主尺多少刻度應等於副尺多少刻度？另外，若游標尺的零點為 -0.05 mm，則量測時得到的數值該如何處理？

附 錄

x 第一部份　原理說明

(一) 四捨六入：

數據經過運算後，所得的結果須將多餘的位數做捨去，此時可採用四捨六入的原則。若被捨棄的數恰好為 5 時，則依據 5 的前一位數來決定其是否進位或是捨去。若前一位數為奇數則進位，偶數則捨去。例如，處理前數據為 6.15，則取有效數字兩位後為 6.2；若處理前數據為 6.65，則取有效數字後為 6.6。

(二) 統計分析計算公式：

如果測量某物理量 n 次，所得到的數據為 x_1、x_2、$x_3 \ldots x_n$，以下是統計分析方法中常用的幾個術語以及其計算公式：

(1)　算數平均值(Mean)：

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(2)　偏差(Deviation)：

$$d_1 = x_1 - \bar{x},\quad d_2 = x_2 - \bar{x},\quad d_3 = x_3 - \bar{x},\quad \cdots,\quad d_n = x_n - \bar{x}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n = \sum_i d_i = 0$$

(3)　平均偏差(Average Deviation)：

$$D \equiv \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + \ldots + |d_n|}{n} = \frac{1}{n}\sum_i |d_i|$$

(4)　標準差(Standard Deviation)：

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{d_1^{\ 2} + d_2^{\ 2} + d_3^{\ 2} + \ldots + d_n^{\ 2}}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}}\ (n\ \text{極大時})$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}}\ (n\ \text{有限時})$$

(5)　平均標準差(Standard Deviation of The Mean)：

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_i d_i^{\ 2}}$$

(6)　實驗結果：

$$x = \bar{x} \pm \bar{\sigma}$$

(7)　百分誤差：

$$e\% = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{x}} \times 100\%$$

(三) 誤差傳遞：

當 x、y 為獨立變數且個別帶有誤差量時，其在加、減、乘、除四則運算中，所得之數值及此數值的誤差計算如下：

(1)　加減的計算及誤差傳遞：

$$\overline{x \pm y} = \bar{x} \pm \bar{y}$$

$$\sigma_{\overline{x\pm y}}{}^2=\sigma_{\bar{x}}{}^2+\sigma_{\bar{y}}{}^2 \;\Rightarrow\; \sigma_{\overline{x\pm y}}=\sqrt{\sigma_{\bar{x}}{}^2+\sigma_{\bar{y}}{}^2}$$

即 $(\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}})+(\bar{y}\pm\sigma_{\bar{y}})=(\bar{x}+\bar{y})\pm\sigma_{\overline{x+y}}$

$$(\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}})-(\bar{y}\pm\sigma_{\bar{y}})=(\bar{x}-\bar{y})\pm\sigma_{\overline{x-y}}$$

當 n 個量相加減時，其誤差傳遞的一般性公式為：

$$\sigma_i{}^2=\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2+\cdots+\sigma_n{}^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i{}^2$$

範例：

兩個物理量分別測得 x = 25.126±0.132 及 y = 12.36±0.35

經過加法運算，則測量值 $\overline{x+y}=$ 37.486

其誤差為 $\sigma_{x+y}=\sqrt{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2}=\sqrt{(0.132)^2+(0.35)^2}=0.37406\ldots$

注意：此例中 x 的有效位數為小數點下三位，y 的有效位數為小數點下兩位。

依據有效位數的計算原則，$\overline{x+y}$ 的值亦取小數點下兩位，即 $\overline{x+y}$=37.49。**±號後面的誤差值的位數應與±號前面的數值一致**，故計算結果可表示為 $x+y$ = 37.49 ± 0.37。

同理，減法運算(x - y)之結果可表示為：$x+y$ = 12.77 ± 0.37。

(2) 乘除的誤差傳遞：

$$\overline{xy}=\bar{x}\bar{y} \quad ; \quad \overline{x/y}=\bar{x}/\bar{y}$$

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{xy}}}{\overline{xy}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\; \sigma_{\overline{xy}}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}\times\overline{xy} \quad (\text{±號為使 } \sigma_{\overline{xy}} \text{ 為正})$$

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{x/y}}}{\overline{x/y}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \;\Rightarrow\; \sigma_{\overline{x/y}}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}\times\overline{x/y}$$

即 $(\bar{x}+\sigma_{\bar{x}})\times(\bar{y}+\sigma_{\bar{y}})=\overline{xy}\pm\sigma_{\overline{xy}}$

$$(\bar{x}+\sigma_{\bar{x}})/(\bar{y}+\sigma_{\bar{y}})=\overline{x/y}\pm\sigma_{\overline{x/y}}$$

當 n 個量相乘除時，其誤差傳遞的一般性公式為：

$$\left(\frac{\sigma}{y}\right)^2=\left(\frac{\sigma_1}{y_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{y_2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_3}{y_3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\sigma_n}{y_n}\right)^2$$

其中，y 為經計算結果之導出量的平均值；y_1、y_2、$y_3\ldots y_n$ 為乘除計算中每一個物理量之平均值。

範例：

兩個物理量分別測得 x = 25.126±0.132 及 y = 12.36±0.35

經過乘法運算，兩者相乘之平均值為 $\overline{xy}=25.126\times12.36=310.5574$

標準差為 $\sigma_{\overline{xy}}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}\times\overline{xy}=\pm\sqrt{\left(\frac{0.132}{25.12}\right)^2+\left(\frac{0.35}{12.36}\right)^2}\times310.5574$

$\Rightarrow\ \sigma_{xy} = \pm 8.94416303\ldots$

注意：此例中 x 的有效位數有五位，y 的有效位數有四位。**依據有效位數的計算原則**，$\overline{xy}$ 的值亦取有效位數有四位，即 $\overline{xy}$=310.6。**±號後面的誤差值的位數與±號前面的數值一致**，故計算結果可表示為 $x\,y = 310.6 \pm 8.9$。

同理，除法運算結果為 x/y =2.032±0.059

(3)　有冪次的乘除：

$$\overline{x^l y^m} = \overline{x^l}\,\overline{y^m} = \bar{x}^l\,\bar{y}^m$$

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{x^l y^m}}}{\overline{x^l y^m}}\right)^2 = l^2\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + m^2\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2$$

由以上的運算規則求出導出量的平均標準差之後，導出量的正規表示法則為“平均值±平均標準差”。但也有用百分誤差來代替平均標準差，其導出量的表示法為“平均值±百分誤差”。

如 $x + y = 37.49 \pm\ 0.37$，亦可寫成 $x + y = 37.49 \pm\ 1.0\%$。

$x\,y = 310.6 \pm 8.9$，亦可寫成 $x\,y = 310.6 \pm\ 2.9\%$。

(四) 迴歸分析：

使用最小平方計算方法是常用的分析方法，可分析資料組的相關性。

(1)　線性迴歸分析(Linear Regression)：

設有 n 個實驗數據(x_i, y_i)，i=0, 1, 2, 3…, n，最適當的迴歸線性曲線方程式為 $y = mx + b$，其中 m 和 b 為係數。所有的實驗數據到此直線的垂直距離平方和為 $D(m,b) = \sum_{i=1}^{n}(mx_i + b - y_i)^2$ 。最適當的曲線是找到一組 m 和 b 使 $D(m,b)$為最小。

當僅有一個自變數 x 時，m 和 b 的值是依據下列公式計算而得：

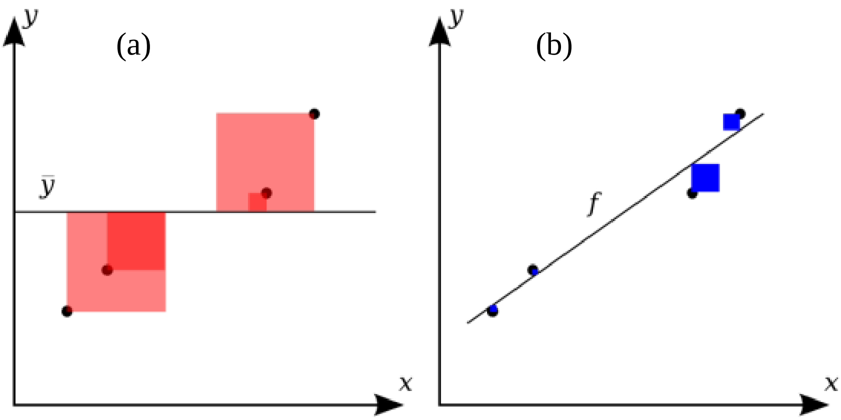
$$m = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

在迴歸分析中會出現另一個統計值 R^2 稱為判定係數，用以評估以迴歸分析所得的線性方程式描述 x 和 y 間的關係之適當程度，其數值為 0～1；當 R^2=1 時，為完全相關；當 R^2 =0 時，則迴歸方程式對預測 y 值不優於使用平均值的描述。以下可參考網址

https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination

較常使用的判定係數定義為 $R^2 \equiv 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$，其中總平方和$SS_{tot}$與殘差平方和$SS_{res}$分別為 $SS_{tot} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$， $SS_{res} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - f_i)^2$。線性回歸最適直線方程式若為 $f(x) = mx + b$，則$f_i = mx_i + b$。



上方的兩示意圖，(a)圖中假設y值與x無關，故以y值的算數平均為最佳代表值，其模型方程式對應一水平直線，圖中方塊面積和等於總平方和SS_{tot}。(b)圖中直線對應線性回歸所得模型方程式 $f(x) = mx + b$，圖中方塊面積和等於殘差平方和SS_{res}。若y值與x具有高度線性相關性，相較於取平均值的水平直線，回歸分析所得直線更貼近多數觀察數據點，$SS_{res} \ll SS_{tot}$，R^2 趨近於 1。反之，若y值與x相關性低，觀察數據接近隨機分佈，回歸方程式對於描述觀察結果的適當性接近使用平均值$y = \bar{y}$的描述， $SS_{res} \approx SS_{tot}$，$R^2$ 趨近於 0。

(2) 多項式迴歸分析(Polynomial Regression)：
用多項式函數來描述實驗數據的型式為

$y = b + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$，其中 b 和 c_1、c_2、c_3...為係數。

(3) 指數迴歸分析(Exponential Regression)：
用指數函數來描述實驗數據的型式為

$y = ce^{bx}$，其中 c 和 b 為係數。

(4) 對數迴歸分析(Logarithmic Regression)：
用對數函數來描述實驗數據的型式為

$y = c\ln + b$，其中 c 和 b 為係數。

(5) 乘冪迴歸分析(Power Regression)：
用乘冪函數來描述實驗數據的型式為

$y = cx^b$，其中 c 和 b 為係數。

很多軟體，如 Microsoft Excel、Origin、SciDAVis、Tracker 等，都有數據擬合(fitting)的功能，可以設定曲線方程式，並求得曲線函數中的各係數值。

注意:

做數據擬合前應先對數據背後的物理特性有適當的理解，才能適當選擇出有意義的擬合曲線函數，並從所得到的擬合係數獲得相關的物理量。例如拋體運動軌跡可選擇用二次曲線擬合，可由二次項係數求得運動加速度；固定施力下物體的加速度與質量成反比，可用反比曲線擬合。