

Univariate ARCH Family

林金龍

東華大學財務金融系

2008年6月

1 ARCH 模型簡介

令 r_t 為某一金融資產報酬率:

$$r_t = \mu_t + a_t$$

μ_t 為 r_t 的條件期望值, a_t 為 t 期的干擾項 (innovation)。在 ARCH 模型下, a_t 不存在序列線性相關, 但平方項卻彼此相關。對此 Robert Engle 教授頗有創意的將 a_t 分解成兩個項目相乘,

$$\begin{aligned} a_t &= \sqrt{h_t} \epsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 \\ \epsilon_t &\sim iid N(0, 1) \end{aligned}$$

令 F_{t-1} 代表過去資訊的集合, 則

$$\begin{aligned} E(a_t^2 | F_{t-1}) &= E(h_t \epsilon_t^2 | F_t) \\ &= h_t E(\epsilon_t^2 | F_{t-1}) \\ &= h_t \end{aligned}$$

亦即, h_t 為 a_t 的條件變異數。顯而易見的是, 當 $s < t$,

$$E(a_t a_s) = E(\sqrt{h_t} \epsilon_t \sqrt{h_s} \epsilon_s)$$

$$\begin{aligned}
&= E(E(\sqrt{h_t}\epsilon_t\sqrt{h_s}\epsilon_s|F_s)) \\
&= E(\sqrt{h_t}\sqrt{h_s}E(\epsilon_t\epsilon_s|F_s)) \\
&= E(\sqrt{h_t}\sqrt{h_s}E(\epsilon_t\epsilon_s)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(a_t^2 a_s^2) &= E(h_t \epsilon_t^2 h_s \epsilon_s^2) \\
&= E(E(h_t \epsilon_t^2 h_s \epsilon_s^2 | F_s)) \\
&= E h_t h_s (E(\epsilon_t^2 \epsilon_s^2 | F_s)) \\
&= E(h_t h_s E(\epsilon_t^2 \epsilon_s^2)) \\
&= h_t h_s \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

上式我們稱為 ARCH(1) 模型, a_t 本身不自我相關但平方項卻存在自我相關, 這與觀察的事實吻合。關於 ϵ_t 分配, 除了常態分配外, t 分配, Generalized Error Distribution (GED) 等亦經常 被使用。

ARCH(1) 模型可以推演成 AR(1) 模型。令 $\eta_t = a_t^2 - h_t$ 則

$$\begin{aligned}
E(\eta_t | F_{t-1}) &= E(a_t^2 - h_t | F_{t-1}) \\
&= E(a_t^2 | F_{t-1}) - E(h_t | F_{t-1}) \\
&= h_t - h_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

故 η_t 為一鞅差 (martingale difference) 序列。將 $h_t = a_t^2 - \eta_t$ 代入 ARCH(1) 模型, 可得:

$$a_t^2 - \eta_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 \implies a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \eta_t$$

換言之, ARCH(1) 模型將殘差的平方設定成一 AR(1) 模型。

接著我們探討 ARCH(1) 模型的性質, 首先由 a_t , 可以導出其一階與二階動差, 如下所示:

$$E(a_t) = E[E(a_t|F_{t-1})] = E[\sqrt{h_t}E(\epsilon_t)] = 0$$

$$Var(a_t) = E(a_t^2) = E[E(a_t^2|F_{t-1})] = E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)$$

因爲 a_t 爲一stationary process, 其 $E(a_t) = 0, Var(a_t) = Var(a_{t-1}) = E(a_{t-1}^2)$, 因此, 由上式我們可以得出 $V(a_t) = \alpha_0/(1 - \alpha_1)$ 。爲得出前述所提的資料厚尾的性質, 我們在 ϵ_t 爲常態分配的假設下, 可以導出給定過去資訊 F_{t-1} 下 a_t 的四階動差:

$$E(a_t^4|F_{t-1}) = 3E[a_t^2|F_{t-1}]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2$$

因此,

$$E(a_t^4) = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2 = 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4]$$

若 a_t 爲四階動差穩定, 其四階動差函數爲 $m_4=E(a_t^4)$, 則我們可得出下式:

$$\begin{aligned} m_4 &= 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 Var(a_t) + \alpha_1^2 m_4] = 3\alpha_0^2(1 + 2\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}) + 3\alpha_1^2 m_4 \\ \implies m_4 &= \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)} \end{aligned}$$

由定義知, m_4 爲正值, 而滿足 m_4 爲正值的條件爲 $1 - 3\alpha_1^2 > 0$, i.e. $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$ 。

由 m_4 與 $Var(a_t)$ 的推導, 我們現在可以計算 a_t 的峰態係數(kurtosis), 即

$$\gamma_2 = \frac{E(a_t^4)}{[Var(a_t)]^2} = 3 \frac{\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)} \times \frac{(1 - \alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} > 3$$

因爲我們得出的峰態係數大於3, 因此我們可以發現 a_t 分配具有厚尾的性質。當 $t-1$ 期的報酬率有大幅變動時, a_{t-1}^2 變大, h_t 也增大, a_t^2 變大的機率大幅提升, 表現出波動群聚的特性。

2 ARCH家族

1. ARCH(q) 模型
2. GARCH(p,q) 模型
3. GARCH-M 模型
4. GJR-GARCH 模型
5. Asymmetric GARCH
6. APARCH 模型
7. EGARCH 模型

2.1 ARCH(q) 模型

$$\begin{aligned}a_t &= \sqrt{h_t}\epsilon_t \\h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q a_{t-q}^2\end{aligned}$$

相同的, 在 ARCH(q) 模型中, a_t^2 爲其一 AR(q) 模型。令 $\eta_t = a_t^2 - h_t$ 則

$$\begin{aligned}E(\eta_t | F_{t-1}) &= E(a_t^2 - h_t | F_{t-1}) \\&= E(a_t^2 | F_{t-1}) - E(h_t | F_{t-1}) \\&= h_t - h_t \\&= 0\end{aligned}$$

故 η_t 爲一鞅差序列。將 $h_t = a_t^2 - \eta_t$ 代入 ARCH(q) 模型, 可得:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q a_{t-q}^2 + \eta_t$$

當然, ARCH(q) 模型亦保留如 ARCH(1) 所得出的性質: 厚尾與波動群聚性。

2.2 GARCH模型

GARCH(1,1) 模型, 設定如下:

$$\begin{aligned} a_t &= \sqrt{h_t} \epsilon_t, \\ h_t &= E(a_t^2 | F_{t-1}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \\ \epsilon_t &\sim iid N(0, 1) \end{aligned}$$

爲符合弱穩定性質, 需限制 $0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq 1, \alpha_1 + \beta_1 < 1$ 。相同的, 我們可以將其擴展成 GARCH(p,q) 模型, 設定如下:

$$a_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t, h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \epsilon_t \sim (0, 1)$$

依據前述 ARCH 模型的做法, 可以得出 GARCH 模型中, a_t^2 爲一 ARMA 模型, 以 GARCH(1,1) 爲例, 說明如下:

$$\begin{aligned} \eta_t &= a_t^2 - h_t \\ h_t &= a_t^2 - \eta_t \end{aligned}$$

代入 h_t , 得

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \\ a_t^2 - \eta_t &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 (a_{t-1}^2 - \eta_{t-1}) \\ a_t^2 &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) a_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1 \eta_{t-1}, \end{aligned}$$

如前所述, $E(\eta_t | F_{t-1}) = 0$, η_t 爲一鞅差數列, 故 a_t^2 的模型爲 ARMA(1,1)。爲一 ARMA(1,1) 模型。對於 GARCH(p,q) 模型, 令 $m = \max(p, q)$,

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

$$\begin{aligned}
a_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i a_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j \eta_{t-j} + \eta_t \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j \eta_{t-j} + \eta_t
\end{aligned}$$

where $\alpha_i = 0$ for $i = q+1, \dots, m$, $\beta_j = 0$ for $j = p+1, \dots, m$ 。亦即, a_t^2 的模型為 $ARMA(m, p)$ 。

性質

與 ARCH 模型相同的, GARCH 模型也可以導出報酬率分配具厚尾的特性, 以 GARCH(1,1) 為例, 若

$$1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0$$

則

$$\gamma_2 = \frac{E(a_t^4)}{[Var(a_t)]^2} = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3,$$

其亦可表現波動群聚性的性質。

估計

估計程序仍以 MLE 法進行估計, 如前所述。

2.3 IGARCH

我們知道在 GARCH(1,1) 模型中, 要求 $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, 但實證上發現, $\alpha_1 + \beta_1 \simeq 1$, 即 a_t^2 可能不穩定, 因此 IGARCH 模型被提出。以 IGARCH(1,1) 為例, 如下所示:

由

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

因為 $\alpha_1 + \beta_1 = 1 \implies \alpha_1 = 1 - \beta_1$ 代入上式,

$$\implies h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2$$

我們亦可得出 IGARCH 模型的多期預期如下式,

$$h_t(\ell) = h_t(1) + (\ell - 1)\alpha_0, \quad \ell \geq 1$$

當 $\alpha_0 = 0$, 則模型對未來的預測均為一期預測值。此一特例也在 RiskMetrics 中被用來計算風險值 (Value at Risk)。

2.4 GARCH-M

GARCH-M 模型設定如下:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + ch_t + a_t \\ a_t &= \sqrt{h_t}\epsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \end{aligned}$$

GARCH-M 模型將風險考慮進入報酬中, 式中的參數 c , 我們稱其為風險溢酬係數 (risk premium parameter)。在此模型中, 藉由 h_t 導入 mean equation 中, 導出報酬率間彼此存在相關性, 因此風險溢酬係數的存在, 也反映出歷史報酬具相關性的理由。

2.5 GJR-GARCH

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \{\alpha_j + \delta_j I(\epsilon_{t-j} > 0)\} \epsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

2.6 Asymmetric ARCH

Engle, Ng, and Sentata

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\epsilon_{t-1} - \gamma)^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

2.7 APARCH

Ding, Granger and Engle (1983)

$$h_t^k = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^{2k} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^k, k > 0$$

2.8 EGARCH

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q g_j(z_{t-j}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j}$$

where $g_j(z_{t-j}) = \alpha_j z_{t-j} + \Psi_j(|z_{t-j}| - E|z_{t-j}|), j = 1, \dots, q$