

Analytic Hierarchy Process Theory

層級分析法(AHP)理論與實作

國立東華大學企業管理學系 教授

褚志鵬

2009

(教學講義 請勿擅印)

目 錄

一、前言.....	1
二、理論介紹	2
2.1、AHP 法的目的與假設.....	2
2.2、AHP 法的層級與要素.....	4
2.2.1 層級結構化的要點.....	4
2.2.2 建立層級的優點：.....	5
2.3 評估尺度.....	6
2.3.1 AHP 的評估尺度.....	6
2.3.2 AHP 法選擇 1-9 尺度的理由	6
三、AHP 的進行步驟與運算方法.....	8
3.1 AHP 的進行步驟.....	8
3.2 AHP 的運算方法 (參讀).....	10
四、AHP 的應用	13
4.1 AHP 的適用範圍.....	13
4.2 AHP 應用領域.....	13
五、應用範例說明	15
5.1 計算第二層影響因素的權重.....	16
5.2 計算選擇方案的權重.....	18
六、AHP 目前於學術上之發展與運用	20
6.1. 新的思考角度.....	20
6.2.修正方法.....	20
6.3. 結合新方法.....	20
參考文獻.....	21

一、前言

在人的一生中，常常要做各種決策，較小者如餐館用餐時菜單的決定、電話號碼的選擇、衣服的挑選、假日旅遊地點的決定及開車時路線的選擇等。影響較大者，如就讀學校的選擇、就業時企業的選擇、結婚對象的挑選。這些種種決策的過程，都是從許多替代方案當中依據幾個準則，從中選擇一個或多數個替代方案。由於人一生中面臨如此多的決策，決策的模式很容易會變成根據過去所累積的選擇行為（也就是經驗），經主觀的判斷後再下決定（決策）。

二、理論介紹

決策問題不僅發生在個人，甚至於社會團體、地方政府及中央政府等機關，隨時都面臨各式各樣的決策問題。個人的決策可以用經驗的判斷與主觀的決定，所影響的層面只是個人或家庭；而對於影響到社會群體的政府決策則不然，因為影響的層面至廣且深，因此決策者（群體）需有『履薄冰、臨深淵』的戒懼，為調合不同方案對重大影響因素產生的利弊得失，應該要利用科學方法進行評估，以作為形成決策之依據。



層級分析法¹（Analytic Hierarchy Process, AHP）為 1971 年 Thomas L. Saaty（匹茲堡大學教授）所發展出來，主要應用在不確定情況下及具有多數個評估準則的決策問題上。當年，Saaty 替美國國防部從事應變計畫問題（Contingency Planning Problem）的研究，並於 1972 年在美國國家科學基金會資助下，進行各產業電力合理分配的研究。1972 年 7 月，Saaty 在開羅替埃及政府從事『無和平、無戰爭』（No Peace, No War）對埃及經濟、政治狀況的影響研究時，開始將有關的判斷尺度化。1973 年，Saaty 將 AHP 法應用在蘇丹運輸研究後，整個理論才趨成熟；其後在 1974 年至 1978 年間，經不斷應用修正及證明後，使得整個理論更臻完備。1980 年，Saaty 遂將此一理論整理成專書問世，隨後在 1982 年至 1987 年間，相繼出版有關 AHP 理論的專著共三冊。AHP 發展以來，在國際期刊發表的相關論文不斷的出現，而且應用的範圍也相當的廣泛。



AHP 法的理論簡單，同時又甚具實用性，因此自發展以來，已被各國研究單位普遍應用；國內從 Saaty 第一本專著出版後開始引進，至今已應用得相當普遍。本文的目的，主要探討 AHP 法的內涵特性、理論基礎及目前的發展等，同時以一簡單應用實例加以說明。

2.1、AHP 法的目的與假設

現代社會是一個『問題複合體』（Problematique）的結構，這些問題又由一些交互影響的要素所組成，包括有形的與無形的、質的與量的。最近十餘年來，系統方法的發展，在社會及行為科學上已經廣泛的被應用，使得複雜的問題能夠簡化，同時建立具有相互影響關係的階層結構。

¹ 基維百科上關於 AHP 的資訊可參閱: http://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_Hierarchy_Process

對於決策者而言，階層結構有助於對事物的了解，但在面臨『選擇適當方案』時，必須根據某些基準，進行各替代方案的評估，以決定各替代方案的優勢順位（Priority），從而找出適當的方案。評估基準必須從技術、科學、社會、經濟及政治等層面來考量，如果僅就單一層面來決定，則將導致錯誤的決策，而錯誤的決策比沒有決策來得更嚴重。AHP 就在這樣的背景下，發展出來的一套理論，提供在經濟、社會及管理科學等領域，處理複雜的決策問題。

AHP 發展的目的，就是將複雜的問題系統化，由不同的層面給予層級分解，並透過量化的方法，覓得脈絡後加以綜合評估，以提供決策者選擇適當的方案。而 Saaty (1980) 發展 AHP 方法的基本假設，主要包括下列幾項：

1. 一個系統可被分解成許多種類（Classes）或成份（Components），並形成有像網路的層級結構。
2. 層級結構中每一層級的要素均假設具獨立性（Independence）。
3. 每一層級內的要素，可以用上一層級內某些或所有要素作為評準，進行評估。
4. 比較評估時，可將絕對數值尺度轉換成比例尺度（Ratio Scale）。
5. 各層級要素進行成對比較後，可使用正倒值矩陣（Positive Reciprocal Matrix）處理。
6. 偏好關係滿足遞移性（Transitivity）；不僅優劣關係滿足遞移性（A 優於 B 優於 C 則 A 優於 C），同時強度關係也滿足遞移性（A 優於 B 二倍 B 優於 C 三倍則 A 優於 C 六倍）。
7. 完全具遞移性不容易，因此容許不具遞移性的存在，但需測試其一致性（Consistency）的程度。
8. 要素的優勢程度經由加權法則（Weighting Principle）而求得。

其次，應用 AHP 方法的前提，乃是將評比方案所根據的準則（要素）相互比較後的重要程度，均賦予等級不同的數值，以便進行一連串的數值運算，求出最終參考值。

2.2、AHP 法的層級與要素

階層為系統特別的型態，基於個體可加以組成並形成不同集合體的假設下，將影響系統的要素組合成許多層級（群體），每一層級只影響另一層級，同時僅受另一層級的影響。

層級為系統結構的骨架，用以研究階層中各要素的交互影響，以及對整個系統的衝擊 (Impact)。層級的結構可以從整體目標 (Apex)、子目標 (Subobjectives)、影響子目標的要素 (Factors)、影響要素的人們 (People)、人們的目標及政策 (Policies)、更遠的策略 (Strategies)，最後則為從這些策略所得到的結果 (Outcomes) 等，從而形成多重層級。層級的多寡端視系統的複雜性與分析所需而定。

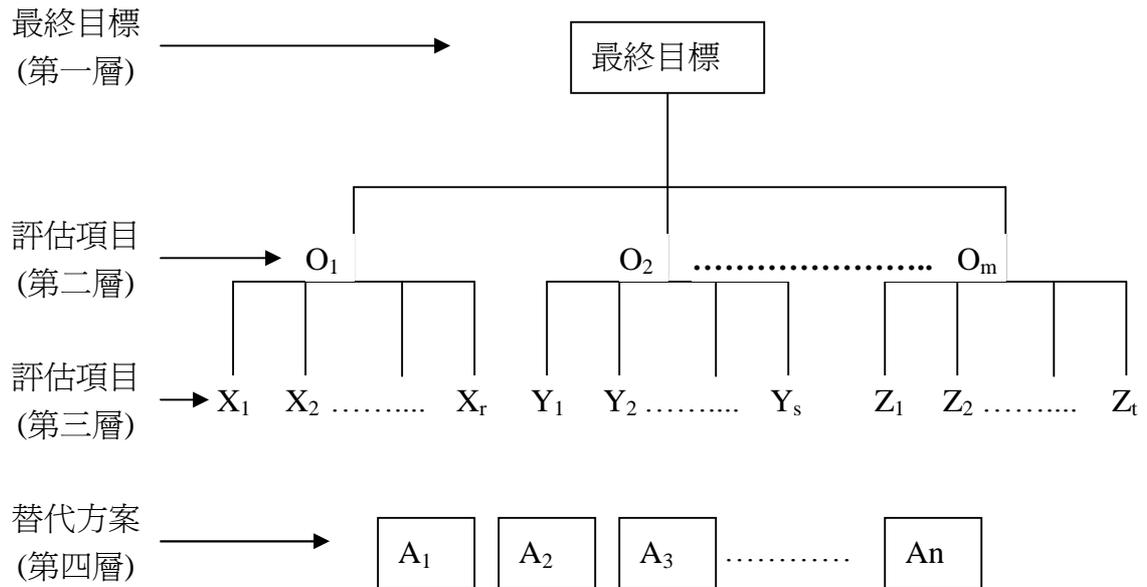
利用層級來分析問題或系統，是站在最高層級來看不同層級的相互影響，而不是直接從各層級的要素來分析；因此建立系統的層級結構時，需要解決的問題有二：一是如何構建層級的關係，二是如何評估各層級要素的影響程度。

如何構建層級的關係：可利用腦力激盪法 (Brain-storming)、明示結構法 (Interpretive Structure Modelling；ISM)、階層結構分析法 (Hierarchical Structure Analysis；HSA)、結構模型化群體法 (Group Method of Structure Modelling；GMSM)，以及 PATTERN 法 (Planning Assistance Through Technical Evaluation of Relevance Numbers) 等，加以確認其層級關係，實際應用上並無一定的構建程序。

如何評估各層級要素的影響程度：可利用特徵向量法 (Eigenvector Method；EM)、最小平方法 (Least Squares Method；LSM)、幾何平均法 (Geometric Means Method；GMM)、Churchman 法，及 Scheffe' 法等，而 AHP 法是利用特徵向量法求取要素間的權重。

2.2.1 層級結構化的要點

將影響系統的要素加以分解成數個群體，每群再區分成數個次群，逐級建立全部的層級結構，其關係如圖 1 所示：



圖一 AHP 層級結構示意圖

在分析組群時，應注意以下各點：

- (1) 最高層級代表評估的最終目標（如圖 1）。
- (2) 儘量將重要性相近的要素放在同一層級。
- (3) 層級內的要素不宜過多，依 Saaty 的建議最好不要超過 7 個，超出者可再分層解決，以免影響層級的一致性。
- (4) 層級內的各要素力求具備獨立性，若有相依性（Dependence）存在時，可先將獨立性與相依性各自分析，再將兩者合併分析（有關獨立性與相依性後文將詳述）。
- (5) 最低層級的要素即為替代分案。

2.2.2 建立層級的優點：

依據 Saaty 的說明，建立層級結構具有以下的優點：

- (1) 利用要素個體形成層級形式，易於達成工作。
- (2) 有助於描述高層級要素對低層級要素的影響程度。
- (3) 對整個系統的結構與功能面能詳細的描述。
- (4) 自然系統都是以層級的方式組合而成，而且是一種有效的方式。
- (5) 層級具有穩定性（Stability）與彈性（Flexibility），也就是說微量的改變能形成微量的影響，同時新層級的加入對一結構良好的層級而言，並不會影響整個系統的有效性。

2.3 評估尺度

2.3.1 AHP 的評估尺度

AHP 評估尺度的基本劃分包括五項，及同等重要、稍重要、頗重要、極重要及絕對重要等，並賦予名目尺度 1、3、5、7、9 的衡量值；另有四項介於五個基本尺度之間，並賦予 2、4、6、8 的衡量值。有關各尺度所代表的意義，如表 1 所述。AHP 在處理認知反應的評估得點時，則採取比率尺度的方式（從名目尺度產生）。

表 1 AHP 評估尺度意義及說明

評估尺度	定義	說明
1	同等重要 (Equal Importance)	兩比較方案的貢獻程度據同等重要性 ● 等強 (Equally)
3	稍重要 (Weak Importance)	經驗與判斷稍微傾向喜好某一方案 ● 稍強 (Moderately)
5	頗重要 (Essential Importance)	經驗與判斷強烈傾向喜好某一方案 ● 頗強 (Strongly)
7	極重要 (Very Strong Importance)	實際顯示非常強烈傾向喜好某一方案 ● 極強 (Very Strong)
9	絕對重要 (Absolute Importance)	有足夠證據肯定絕對喜好某一方案 ● 絕強 (Extremely)
2,4,6,8	相鄰尺度之中間值 (Intermediate values)	需要折衷值時。

2.3.2 AHP 法選擇 1-9 尺度的理由

為什麼 Saaty 要選擇 1-9 的評估尺度呢？依 Saaty 所提出的理由，經分析後歸納成以下八點：

- (1) Ernest Heinrich Weber (1795-1878) 在 1846 年從事心理反應的研究，發現人類對尺度 S 的反應，當 S 成一固定比例增加時，能夠注意到增加部分所產生的改變。
- (2) Gustav Theodor Fechner (1801-1887) 在 1860 年從事心理反應的研究，發現人類對間斷的算術序列，能夠注意到當中不同的地方。
- (3) Weber & Fecher 在隨後的研究中發現，人類的反應與所使用的尺度，成自然

對數 (Logarithm) 的線性函數，這就是 Weber-Fecher 精神物理法則 (Psychophysical Law of Weber-Fecher)。

- (4) G.A.Miller 在 1956 年的研究中發現，人類無法同時對 7 種以上的事務進行比較 (或 7 ± 2)；為避免混淆，Saaty 採取 9 的最高限。為了再不同的連續數值中做同一的比較，因此起始值定為 1，而尺度的範圍成為 1-9。
- (5) Green, P. & Yoram Wind 在 1973 年所出版「行銷的多屬性決策」 (Multi-attribute Decision in Marketing) 一書中，也曾說明從行銷研究中的發現，及一個人對值的判斷，不能超過 7 個尺度值。
- (6) 質的判斷再實務上極具意義，當進行性質相近的比較時，需要有精確的劃分，以表現人類不同的感覺，這樣才能進行比較。
- (7) 目前的統計理論上未能提供在實務設計好的判斷資料，通常應用誤差均方根 (Root Mean Square, RMS) 與中位數絕對誤差 (Median Absolute Deviation, MAD) 兩個指標。Saaty 從 27 種不同的尺度值進行實驗，發現 1-9 的尺度值其 RMS 與 MAD 最小，同時能提供較佳的一致性測試。
- (8) 人類對質的區別能力，以利用等強、稍強、頗強、極強及絕強等 5 個屬系加以表示較好。為了更精確起見，宜在相鄰二個屬性間有一折衷屬性，使得到更好的連續性，因此總共需 9 個屬性值。

三、AHP 的進行步驟與運算方法

3.1 AHP 的進行步驟

處理複雜的問題時，需利用有系統的方法加以分析，AHP 即秉承此一精神，在具有多目標 (Multi-objective) 或多評準 (Multi-criteria) 的決策領域中，是一種簡單而又實用的方法。在實際應用 AHP 處理複雜問題時，大致可區分為以下五個步驟。

- (I) 問題的界定
- (II) 建構層級結構
- (III) 問卷設計與調查
- (IV) 層級一致性的檢定
- (V) 替代方案的選擇

(I) 問題的界定

對於問題所處的系統移儘量擴大，可能影響問題的要因均需納入問題中，同時成立規劃群，對問題的範圍加以界定。在此階段有收集資訊，及確認問題和方案兩步驟；前者可採用文獻分析、腦力激盪等方法，蒐集可供確認問題性質、範圍、影響因素、可用資源等資訊；後者係確定問題和分析目的，並視需要而構思可能待選方案。

處理複雜問題時，利用層級結構加以分解有利於系統化的了解；而基於人類無法同時對七種以上的事物進行比較之假設下，每一層的要素不宜超過七個。因此假若問題有 n 個要素，則需作 $(n^2-n)/2$ 個判斷，而在最大要素個數為七個的前提下，較能進行合理的比較並同時可保證其一致性之層級數為 $n/7$ 。如此的層級結構可達到下列益處：

- (1) 易進行有效的成對比較
- (2) 獲得較佳的一致性

(II) 建構層級結構

由規劃群體的成員，利用腦力激盪法及其他技術 (如問卷調查、因素分析、群體分析) (葉牧青，民 78)，找出影響問題行為的評估準則 (Criteria)、次要評估準則 (Sub-criteria)、替代方案的性質，及替代方案等；其次，將此一初步結構，提報決策者或決策群體，以決定是否有些要素需增減，然後將所有影響問題的要素，由規劃群體的成員決定每二個要素間的二元關係 (Binary Relation)。若由規劃群體決定，則需提報決策者或決策群體確認，最後利用 ISM 法或 HAS 法

等階層分析方法，構建整個問題的層級結構。

(III) 問卷設計與調查

每一層級要素在上一層級某一要素作為評估基準下，進行成對比較。因此，對每一個成對比較需設計問卷，在 1—9 尺度下，讓決策者或決策群體的成員填寫（勾化每一成對要素比較的尺度）。以就業選擇的簡例而言，有三家公司可供選擇，在公司薪水的評估基準下，三家公司相互間的成對比較問卷必須清楚地敘述每一成對比較的問題，並附加詳細的引導說明，如成本降低、利益增加等。

根據問卷調查所得到的結果，建立成對比較矩陣，再應用計算機求取各成對比較矩陣的特徵值與特徵向量，同時檢定矩陣的一致性。如矩陣一致性的程度不符要求，顯示決策者的判斷前後不一致，因此規劃者須將問題向決策者清楚地說明（一般在填寫問卷前，規劃者宜就每一成對比較問題，向決策者或決策群體的成員說明與分析）。此外，AHP 在此階段可和德菲法（Delphi）合用，收集專家意見，此謂 DHP（Delphi Hierarchy Process）（謝玲芬, 民 78）。

此階段可分為兩個步驟：

(1) 建立成對比較矩陣

假設有 n 個要素時，則需進行 $n(n-1)/2$ 個成對比較。成對比較時之數值分別為 $1/9, 1/8, \dots, 1/2, 1, 2, \dots, 8, 9$ （尺度內容與意義閱表二），將 n 個要素比較之結果，置於成對比較矩陣 A 的上三角形部分（主對角線為要素自身的比較，故均為 1），而下三角形部分的數值，為上三角形相對位置數值的倒數。即 $a_{ji} = 1/a_{ij}$ 。矩陣如下圖所示：

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 計算特徵值與特徵向量

建立完比較矩陣後，即可透由數值分析中常用的特徵值（Eigenvalue）解法，找出特徵向量值，進而求出各層級要素的權重，演算法於第 3.2 節中介紹。

(IV) 層級一致性的檢定

成對比較矩陣內之數值，為決策者依主觀所下之判斷值，但由於判斷層級與因素眾多，使得決策者在兩兩比較的判斷下，較難達成前的一致性。因此需對該數值進行一致性檢定，並作成一致性指標 (Consistency Index, C.I.)，檢查決策者回答所構成的成對比較矩陣，是否為一致性矩陣。

若每一成對比較矩陣的一致性程度均符合所需，則尚需檢定整個層級結構的一致性。如果整個層級結構的一致性程度不符合要求，顯示層級的要素關聯有問題，必須從新進行要素及其關聯的分析。

層級一致性的檢定分析可使用試算表軟體 (如 Excel)、專用分析軟體『專家選擇』系統 (Expert Choice)，或以程式語言 (如 C、Delphi 等) 自行設計分析程式。

(V) 替代方案的選擇

若整個層級結構通過一致性檢定，則可求取替代方案的優先向量。只有一位決策者的狀況，只需求取替代方案的綜合評點 (優勢程度) 即可；若為一決策群體時，則需分別計算每一決策成員的替代方案綜合評點，最後利用加權平均法 (如幾何平均法)，求取加權綜合評點，以決定替代方案的優先順序。若目的是建立權重體系，則可免此步驟。

3.2 AHP 的運算方法 (參讀)

當矩陣建立完成後，接下去就需計算出其向量值，以求權重。Saaty 提出以下四種近似法求取向量值：

(1) 行向量平均值標準化法

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1-1)$$

(2) 列平均值的標準化法

$$W_i' = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}} \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (1-2)$$

(3) 行向量和倒數的標準化法

$$W_i' = \frac{(1 / \sum_{i=1}^n a_{ij})}{\sum_{j=1}^n (1 / \sum_{i=1}^n a_{ij})} \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (1-3)$$

(4) 列向量幾何平均值標準化法

$$W_i' = \frac{(\prod_{j=1}^n a_{ij})^{\frac{1}{n}}}{\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^n a_{ij})^{\frac{1}{n}}} \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (1-4)$$

一般而言，AHP 法在計算向量值時，是採用第一種行向量平均值標準化法來計算，由於大部分之矩陣為非一致性矩陣，運用該法計算其精確度較佳。求算在計算完向量後，欲求判斷前後之一致性時，需計算 C.I. 值，其公式為：

$$C.I. = \frac{\lambda - n}{n - 1} \quad (1-5)$$

由公式可知欲求算 C.I. 前需先求出 λ 值；因此運用上述所求出之權重 w，我們先求算一致性向量（Consistency vector）用 v 符號代表，以便求得 λ 值，其公式為：

$$v_i = (\sum_{j=1}^n w_j a_{ij}) / w_i \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (1-6)$$

求得一致性向量後，求其 v 值之算數平均數即可得 λ 值，其公式為：

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} \quad i=1,2,\dots,n \quad (1-7)$$

最後將其 λ 值代入即可得 C.I. 值；C.I. = 0 表示前後判斷完全一致，Saaty 建

議在 R.I.<0.1 的情況下，皆可視為有較佳的一致性。

根據 Dak Ridge National laboratory 與 Wharton School 進行的研究，從評估尺度 1 - 9 所產生的正倒矩陣，在不同的階層數下，產生不同的 C.I. 值，稱為隨機指標 (Random Index ; R.I.)。而 C.I. 值與 R.I. 值的比率，稱為一致性比率 (Consistency Ratio ; C.R.) 即：

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.} \tag{1-8}$$

因此在 C.R. 值在小於 0.1 時，其矩陣之一致性程度是很高的。其隨機指標值如下表：

表 2 隨機指標表

階數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R.I.	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.58

資料來源：鄧振源、曾國雄 (1989)；王明好 (2000)

求算完各層級之權重後，最底層之替代方案也是運用上述相同的順序求算出權重與判斷一致性的 C.I. 值與 C.R. 值。而最後如何決定出最佳決策，以下圖四來分析說明最後決策評估值的計算：

首先在第二層評估項目上 (X₁, X₂, ..., X_r)，我們可計算出權重，我們以 W 代表；第三層替代方案上 (P₁, P₂, ..., P_n)，我們可評價出每個方案的相對重要程度，我們用 α 表示，因此我們在分別求取各個替代方案的評點時，即為將各方案之評價值乘以各個評估項目之權重後加總為各個方案之評點以 S 為代表，其公式如下：

$$S_i = \sum_{j=1}^r w_j \alpha_{ji} \dots\dots\dots i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,r \tag{1-9}$$

如此就可評比出各方案之評點。

四、AHP 的應用

AHP 自 Saaty 發展以來，已應用得非常普遍；本節主要探討 AHP 的適用範圍與已應用的領域，以及處理複雜問題應用的程序。

4.1 AHP 的適用範圍

AHP 主要應用在決策問題 (Decision Making Problems)，依 Saaty 的經驗，AHP 可應用在以下 12 類問題中：

- (1) 規劃 (Planning)。
- (2) 替代方案的產生 (Generating a Set of Alternatives)。
- (3) 決定優先順序 (Setting Priorities)。
- (4) 選擇最佳方案或政策 (Choosing a Best Alternatives)。
- (5) 資源分配 (Allocating Resources)。
- (6) 決定需求 (Determining Requirements)。
- (7) 預測結果或風險評估 (Predicting Outcomes/Risk Assessment)。
- (8) 系統設計 (Designing Systems)。
- (9) 績效評量 (Measuring Performance)。
- (10) 確保系統穩定 (Insuring the Stability of a System)。
- (11) 最適化 (Optimization)。
- (12) 衝突的解決 (Resolving Conflict)。

4.2 AHP 應用領域

從 AHP 發展後，在許多領域中已廣泛的應用，諸如政治分析、運輸規劃、投資組合的應用、設施區位的規劃、能源政策的規劃、下棋行為的預測、都市運輸系統的評估、行銷研究，以及最近幾年朝向與多目標規劃 (Multiobjective Programming) 相結合，並推廣在大規模系統 (Large-Scale Systems) 的設計、處理風險 (Risk)，與不確定性 (Uncertainty) 的問題等。根據 Zahedi 的研究與最近發展的趨勢，AHP 的應用領域可區分為以下 30 類：

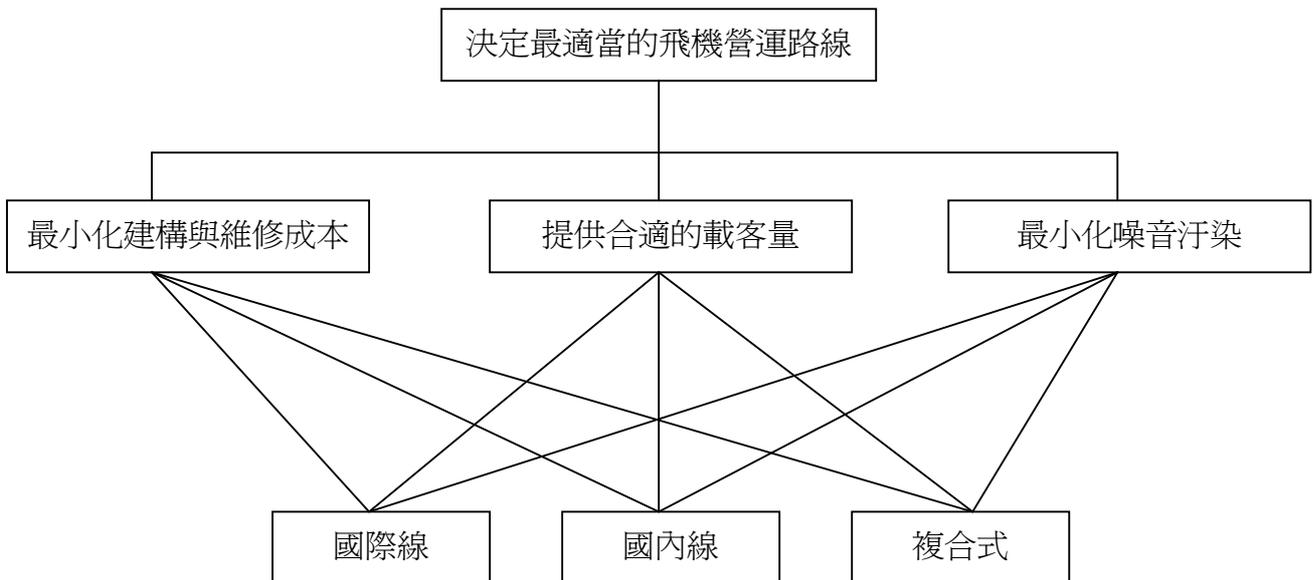
- | | |
|--------------------|------------------|
| (1) 經濟與規劃。 | (6) 彈性製造系統。 |
| (2) 能源 (政策與資源分配)。 | (7) 人力選擇與績效評估。 |
| (3) 健康。 | (8) 專案計劃選擇。 |
| (4) 衝突解決軍事管制及世界影響。 | (9) 行銷管理。 |
| (5) 材料控制與採購。 | (10) 資料庫管理系統的抉擇。 |
| | (11) 辦公室自動化。 |

- (12) 微電腦的選擇。
- (13) 預算分配。
- (14) 投資組合的選擇。
- (15) 成本—數量—利潤 (Cost—Volume—Profit) 分析的模型選擇。
- (16) 會計與審計。
- (17) 教育。
- (18) 政治。
- (19) 主觀機率的估計與交叉影響分析 (Cross Impact Analysis)。
- (20) 社會學。
- (21) 區域間遷移型態。
- (22) 競爭下的行為研究。
- (23) 環境。
- (24) 建築。
- (25) 模糊集合 (Fuzzy Set) 中用以評量隸屬程度 (Membership Grade)。
- (26) 方法論的發展。
- (27) 諮詢。
- (28) 運輸規劃。
- (29) 多目標規劃。
- (30) 大規模系統的設計。

五、應用範例說明

以下我們以一個簡單的範例來說明 AHP 的運算過程。範例背景為墨西哥城市為了要開發新的機場，需在許多因素的考量下作決策，例如考量到地形的適合問題、機場交通位置的問題、機場載客量的問題或是機場決定營運路線的問題，皆是在諸多限制條件下，所需決定出的決策；因此為了讓計算過程更為清楚，我們將其一個主要的決策目標「決定最適當的飛機營運路線」為例，並適當的簡化決策考量因素，以利說明在多個選擇方案下作決策的運算過程。

在決定飛機的營運路線決策上，我們有三個主要影響因素分別為「最小化建構與維修成本」、「提供合適的載客量」及「最小化噪音汙染」，而可選擇的方案有 1.國際線，2.國內線及 3.複合式也就是國際線與國內線並存等三項，依此條件我們可畫出該決策的層級結構圖，如下圖：



圖五 飛機營運路線層級結構圖

因此我們下一步就可利用成對比較矩陣來運算出在各個不同的因素考量下每個選擇方案的權重值。

表 4 第二層影響因素計算直欄總合

影響因素	最小化建構與維修成本	提供合適的載客量	最小化噪音汙染
最小化建構與維修成本	1	3	9
提供合適的載客量	0.333	1	6
最小化噪音汙染	0.111	0.167	1
欄總合	1.444	4.1667	16.0

接著將矩陣中的值除以每個欄總合以求得標準化之值，如下圖：

表 5 第二層影響因素標準化成對比較矩陣

影響因素	最小化建構與維修成本	提供合適的載客量	最小化噪音汙染
最小化建構與維修成本	0.6923	0.7200	0.5625
提供合適的載客量	0.2308	0.2400	0.3750
最小化噪音汙染	0.0769	0.0400	0.0625

之後依照行向量平均值標準化法之公式可知，將列加總求平均就可得各因素之權重值了，如下圖：

因素	權重	列平均
最小化建構與維修成本	0.6583	$= (0.6923+0.7200+0.5625)/3$
提供合適的載客量	0.2819	$= (0.2300+0.2400+0.3750)/3$
最小化噪音汙染	0.0598	$= (0.0769+0.0400+0.0625)/3$

表 6 第二層影響因素權重值矩陣(向量)

當我們計算出權重之後，就需考量到一致性的問題，因此下一步將是計算 C.I 值，以確定我們所計算出之值是具一致性的有效權重。依據公式(1-5)可知，欲求得 C.I 值需先運算出一致性向量，並求出 λ 值，方能解出 C.I 值，因此依公式(1-6)可得如下之一致性向量值：

$$\begin{bmatrix} (0.6583)(1) & +(0.2819)(3) & +(0.0598)(9) \\ (0.6583)(0.333)+(0.2819)(1) & & +(0.0598)(6) \\ (0.6583)(0.111)+(0.2819)(0.1677)+(0.0598)(1) & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0423 \\ 0.8602 \\ 0.1799 \end{bmatrix}$$

$$\text{一致性向量} = \begin{bmatrix} 2.0423/0.6583 \\ 0.8602/0.2819 \\ 0.1799/0.0598 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1025 \\ 3.0512 \\ 3.0086 \end{bmatrix}$$

再由公式(1-7)可求出 λ 值如下：

$$\lambda = \frac{3.1025 + 3.0512 + 3.0086}{3} = 3.0541$$

最後可算出 C.I.值如下：

$$C.I. = \frac{\lambda - n}{n - 1}$$

$$C.I. = \frac{3.0541 - 3}{3 - 1} = 0.0270$$

得出 C.I.值之後再利用隨機指標表中，依據 n 的個數選取 R.I 值，就可算出 C.R.值如下，可看到其 C.R.值是小於 0.1 的，因此其一致性程度是可接受的。

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.}, \quad n=3, R.I.=0.58$$

$$C.R. = \frac{0.027}{0.58} = 0.0466 < 0.1$$

5.2 計算選擇方案的權重

計算完影響因素之權重後，對於選擇方案上也是相同的計算方式來進行權重的計算；從本範題的層級結構圖中我們可以知道在每一個因素下皆有三個需考量的方案，因此決策者就需站在每一個因素的觀點下去比較其選擇方案的重要性；故在相同的程序下也需完成成對比較矩陣如下：

表 7 「最小化建構與維修成本」下三方案的成對比較矩陣

最小化建構與維修成本	國際線	國內線	複合線
國際線	1	1/2	1/8
國內線	2	1	1/5
複合線	8	5	1

表 8 「提供合適的載客量」下三方案的成對比較矩陣

提供合適的載客量	國際線	國內線	複合線
國際線	1	1	6
國內線	1	1	3
複合線	1/6	1/3	1

表 9 「最小化噪音汙染」下三方案的成對比較矩陣

最小化噪音汙染	國際線	國內線	複合線
國際線	1	1/8	1/3
國內線	8	1	3
複合線	3	1/3	1

依照上述矩陣就可運算出每一個決策在不同因素考量下的重要性為何，依照公式(1-9)將每一個方案的權重乘上各因素之權重加總及為該決策之最後權重，

(重覆) 表 9 第二層影響因素權重值矩陣(向量)

影響因素	因素權重
最小化建構與維修成本	0.6583
提供合適的載客量	0.2819
最小化噪音汙染	0.0598

表 9 為第二層影響因素的權重值，表 10 為各選擇方案的評估值，將影響因素之權重值，分別乘以下列三個分析之評估值就可以得到最終的權重值。

表 10 各選擇方案的權重評估值

各方案之評估值	國際線	國內線	複合線
最小化建構與維修成本	0.0874	0.1622	0.7504
提供合適的載客量	0.4967	0.3967	0.1066
最小化噪音汙染	0.082	0.6816	0.2364

例如將國際線的評估值也就第一行之值分別乘以所對應之影響因素之權重值，我們就可得 $0.0874*0.6583+0.4967*0.2819+0.082*0.0598 = 0.2025$ 。表 11 為整理之加權值表格。

表 11 方案權重值矩陣(向量)

選擇方案	總合加權評價
國際線	0.20245875
國內線	0.25936567
複合線	0.53817558

因此後我們可得到是複合線也就是國際線與國內線並存的營運路線是最合適於墨西哥在未來機場營運後的經營路線。

六、AHP 目前於學術上之發展與運用

6.1. 新的思考角度

Donegan、Dodd 和 McMaster 在 1992 年提出「修正型 AHP」(modified AHP, MAHP)，解決 AHP 運用右或左轉置特徵向量得到不同的一致性指標值的問題。(Tung & Tang, 1998)。

Saaty (1994) 針對等級逆轉的問題，提出 AHP 的理想做法 (ideal mode) 別於舊的分配做法 (distributive mode)，前者係正規化 (normalizing) 優先值為最大值 1，適用於決策者不能接受因增減和理念無關的項目，卻產生評等逆轉的情形。

Van den Honert (1998) 構思出「乘法的 AHP 法」(multiplicative AHP)，提出區間判斷 (interval judgments) 方法，可以認確發生等級逆轉的機率。

Lipovetsky 和 Tishler(1991)提出「隨機 AHP」法 (random-AHP)，解決 AHP 處理隨機性資料的問題，可算出優先值 (priorities) 的 95% 和 99% 區間估計值。

Zahir(1991)研創出「向量空間形式的 AHP 法」(vector space formulation of the AHP, VAHP)，採多向度思考，不同於傳統 AHP 的單向度思維。

6.2. 修正方法

Kang 和 Stam(1994)針等級逆轉問題，提出具有等級保留特性的「比率量尺偏好的成對聚集階層分析法」(pairwise aggregated hierarchical analysis of ratio-scale preference, PAHAP)。

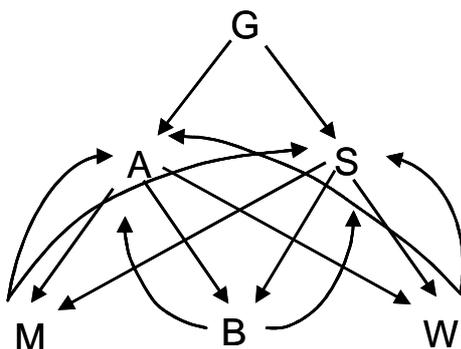
Ra (1999) 創議「連續對對比較法」(chainwise paired comparisons, CPC)，使用幾何平均數，並將 AHP 原來每階層需進行 $N(N-1)/2$ 次比較，簡化成僅需 N 次比較，避免比較邏輯不一致的問題。

6.3. 結合新方法

- (1) 結合模糊理論 (fuzzy theory)，形成「模糊 AHP」(fuzzy AHP) 和「擴

充型模糊 AHP」(extended fuzzy AHP) (Weck, Klocke, Schell & Ruenauber, 1997)。

- (2) 結合多屬性效用理論 (multiattribute utility theory, MAUT) 形成 AHP' (賴世剛, 民 84)。此新法融納 MAUT 和 AHP' 的優點, 但亦有缺失 (方溪迫, 民 83), 成效尚待更多驗證 (Lai & Hopkins, 1995)。
- (3) 分析網路程序法 (Analytic Network Process, ANP) 有別於傳統分析階層程序法之層級架構, 主要以考量存在於方案及準則間之互相依存及回饋 (feedback) 之關係 (圖七), 且明確訂定出各目標及準則間網路形式的架構 (Saaty and Takizawa, 1986)。



圖七 ANP依存結構關係
資料來源:(吳弘毅, 2005)

參考文獻

1. 鄧振源、曾國雄 (1989), 層級分析法(AHP)的內涵特性與應用(上), 中國統計學報, 第 27 卷, 第 6 期, 頁 13707-13724。
2. 鄧振源、曾國雄 (1989), 層級分析法(AHP)的內涵特性與應用(下), 中國統計學報, 第 27 卷, 第 7 期, 頁 13767-13870。
3. 王乃弘(2000), 「民眾偏好醫院類型之研究—AHP 法之應用」, 管理學報, 第 16 卷, 第 4 期, 頁 661-681。
4. 顧志遠(1996), 「多架構 AHP 模式建立之研究」, 管理與系統, 第三卷, 第二期, 頁 217-232。
5. 何敬之、藍筱蘋、劉仁智(1995), 「多評準則決策—分析層級程序法尺度之研究」, 管理科學學報, 第十二卷, 第一期, 頁 127-152。
6. 葉連祺 (2001), 「以階層分析法建構國民小學教師課霧編排指標之權重體系」, 初等教育學刊, 第九卷, 頁 75-112。
7. 葉牧青 (1989), AHP 層級結構設定問題之探討, 國立交通大學管理科學研究

所碩士論文。

8. 方定國(2000),「連鎖加盟因素選擇評估—AHP 決策模式」,管理與資訊學報,第五期,頁 1-26。
9. 方溪泉(1994),「AHP 與 AHP'實例應用比較—以高架橋下土地使用評估為例。國立中興大學都市計劃研究所碩士論文。
10. 賴世剛(1995),分析階層程序法與多屬性效用理論之關係。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告(NSC82-0301-H005A-006)。
11. Saaty Thomas L. (1990), Decision Making For Leaders-the analytic hierarchy process for decisions in a complex world, Pittsburgh, PA: RWS Publications。
12. Saaty Thomas L. (1994), Fundamentals of decision making with the analytic hierarchy process, PA: RWS Publications。
13. Ralph L. Keeney & Howard Raiffa(1993), Decisions with Multiple Objectives-Preferences and Value Tradeoffs, Cambridge, university press。